Rozumowanie matematyczne kompetencją mojego ucznia. Strategie kształcenia myślenia w pracy z uczniem na drugim etapie edukacyjnym.

Justyna Biernacka
doradca metodyczny
ds. matematyki
CRE WŁ w Skierniewicach

Zakres tematyczny

- **Założenia podstawy programowej z matematyki w szkole podstawowej**
- **Uporządkowanie wiedzy na temat kompetencji matematycznych, z uwzględnieniem rozumowania matematycznego.**
- **Narzędzia, strategie i metody pracy sprzyjające rozwojowi kompetencji matematycznych.**
- **Potrzeby Nauczycieli II etapu edukacyjnego?**

Cele

- Po zajęciach nauczyciel:
- Doskonali warsztat pracy w kontekście rozwijania myślenia matematycznego uczniów na II etapie edukacyjnym
- Rozpoznaje kompetencje kluczowe wspierające kształtowanie rozumowania matematycznego
- Zna specyfik nauczania na II etapie edukacyjnym w zakresie rozwijania kompetencji matematyczno-przyrodniczych uczniów, ze szczególnym uwzględnieniem myślenia matematycznego oraz metod i technik pracy nauczyciela wspierających myślenie matematyczne.
- Zna metody i techniki pracy oraz aktywności umożliwiające rozwijanie kompetencji matematycznych.

Realizacja celów kształcenia matematycznego

- Celem nauczania matematyki jest wyrobienie w uczniach intuicji matematycznej właściwej danemu wiekowi.

- Jednym z zadań procesu kształcenia jest rozwinięcie uczniowskich umiejętności wnioskowania, zdolności analitycznych, myślenia strategicznego (planowania kolejnych kroków postępowania w celu rozwiązania problemu, dzielenia procesu rozwiązywania złożonego problemu na etapy) oraz umiejętności krytycznego spojrzenia na rozwiązanie zadania.

- Drugim głównym zadaniem tego procesu jest rozwinięcie umiejętności rachunkowej uczniów na poziomie umożliwiającym rozwiązywanie problemów z zakresu innych przed-miotów w klasach IV–VIII.

Kształcenie ogólne w szkole podstawowej

Umiejętności rozwijane w ramach kształcenia ogólnego

- Sprawne komunikowanie się w języku polskim oraz w językach obcych nowożytnych.
- Sprawne wykorzystywanie narzędzi matematycznych w życiu codziennym oraz kształcenie myślenia matematycznego.
- Poszukiwanie, porządkowanie, krytyczna analiza oraz wykorzystanie informacji z różnych źródeł.
- Kreatywne rozwiązywanie problemów z różnych dziedzin, ze świadomym wykorzystaniem metod i narzędzi wywodzących się z informatyki, w tym programowania.
- Rozwiązywanie problemów, również z wykorzystaniem technik mediacyjnych.
- Praca w zespole i społeczna aktywność.
- Aktywny udział w życiu kulturalnym szkoły, środowiska lokalnego oraz kraju.

Wymagania ogólne w zakresie kształcenia matematycznego

Podstawa programowa kształcenia ogólnego w zakresie nauczania matematyki na II etapie edukacyjnym określa cele kształcenia w postaci wymagań ogólnych, stanowiących podstawę do realizacji treści nauczania. Na wymagania te składają się:

I. Sprawność rachunkowa

- Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub pisemnie w działaniach trudniejszych oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.
- Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji

- Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.
- Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.
- Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

Wymagania ogólne w zakresie kształcenia matematycznego

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

- Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.
- Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

IV. Rozumowanie i argumentacja

- Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.
- Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.
- Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Włączanie uczniów w proces edukacyjny

Działanie to jest bezpośrednio związane z umiejętnością rozpoznawania potrzeb edukacyjnych uczniów. Ich aktywne uczestnictwo w organizowaniu procesu edukacyjnego znacząco podnosi poziom motywacji młodych ludzi, a w konsekwencji skuteczność nauki w szkole.

Rolą nauczyciela jest więc konsekwentne uświadamianie uczniom celów działań edukacyjnych, w ramach których nauczyciel powinien:

- Udzielać uczniom informacji zwrotnej.
- Organizować dyskusje na temat uczenia się.
- Pomagać uczniom w ewaluowaniu ich własnych osiągnięć i planowaniu dalszego rozwoju.
- Stwarzać możliwość współdecydowania o sposobie uczenia się.

Włączanie uczniów w proces edukacyjny

- Wdrażać jak najwięcej aktywizujących metod uczenia się.
- Pozwalać na rozwiązywanie problemów w ramach pracy zespołowej oraz uczenie się od siebie nawzajem.
- Angażować uczniów do występowania w roli uczących.
- Poddawać każdą lekcję refleksji pod kątem poziomu zainteresowania uczniów.
- Skupiać swoją uwagę na celach działalności zawodowej i sposobach osiągania tych celów.
- Stwarzać częste sytuacje skłaniające do profesjonalnych rozmów na temat uczenia się.
- Obserwować i dokonywać wartościowych modyfikacji.

Kształtowanie kompetencji kluczowych na II etapie edukacyjnym

Na kompetencje kluczowe wskazane przez Radę Unii Europejskiej w 2018 r. (określonych w *Zaleceniu Rady Unii Europejskiej z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompeten-cji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie* (Dz.U. UE C189 z 4 czerwca 2018 r.) składa się **8 kompetencji opisujących konieczną wiedzę, umiejętności i postawy człowieka**, które niezbędne są do jego funkcjonowania we współczesnym świecie.

Kompetencje te są konieczne do samorealizacji i rozwoju osobistego, zatrudnienia, włączenia społecznego, aktywnego obywatelstwa i zrównoważonego stylu życia, niezbędne są także na rynku pracy. Kompetencje kluczowe uważa się za jednakowo ważne, ponieważ każda z nich przyczynia się do udanego życia w społeczeństwie. Mogą być stosowane w wielu różnych kontekstach i rozmaitych kombinacjach. Rozwijanie kompetencji kluczowych ma szczególne znaczenie dla uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.

Każdą z tych kompetencji należy rozwijać na lekcjach matematyki.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji poprzez:

- sprawną komunikację podczas pracy w parach, grupach oraz w trakcie pracy wspólnym frontem;
- przeprowadzanie debat – analizę „za i przeciw”, tworzenie metaplanu;
- układanie pytań do rozwiązywanego zadania;
- formułowanie własnych opinii i ocen do rozpatrywanego problemu matematycznego;
- wypowiedzi ustne i pisemne w różnej formie, np. planu rozwiązania zadania, prezentacji.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje w zakresie wielojęzyczności poprzez:

- pracę z aplikacjami służącymi do rozwiązywania problemów matematycznych w językach obcych;
- korzystanie z obcojęzycznych internetowych słowników pojęć matematycznych;
- poznawanie pojęć matematycznych i nazw wywodzących się z języków obcych;
- udział w warsztatach matematycznych w języku angielskim.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii poprzez:

- poszukiwanie argumentów i ich ocenianie;
- korzystanie z modeli, wykresów, tabel, zestawień statystycznych;
- wyjaśnianie zjawisk występujących w przyrodzie;
- rozwiązywanie problemów z życia codziennego;
- weryfikację hipotez;
- rozumienie zmian powodowanych przez działalność ludzką;
- wyjaśnianie zmian społecznych i cywilizacyjnych wywołanych przez odkrycia, wynalazki i działalność człowieka;
- posługiwanie się urządzeniami technicznymi;

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje cyfrowe poprzez:

- korzystanie z komputera i innych urządzeń cyfrowych oraz różnych aplikacji;
- wyszukiwanie informacji w Internecie, ich gromadzenie i selekcję;
- przesyłanie danych oraz komunikowanie się z wykorzystaniem technologii;
- pracę na platformie edukacyjnej oraz pracę w chmurze;
- tworzenie treści cyfrowych, m.in. prezentacji;
- korzystanie z zasobów internetowych zgodnie z prawem – poszanowaniem praw autorskich.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się poprzez:

- naukę indywidualną oraz w grupie;
- organizowanie warsztatu własnej nauki;
- planowanie własnej pracy oraz konstruktywną pracę z innymi osobami;
- właściwe formułowanie celów, określanie własnych zasobów i mocnych stron;
- autorefleksję i samoocenę;
- sporządzanie różnych rodzajów notatek, np. mapy myśli;
- autoprezentację.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje obywatelskie poprzez:

- poszanowanie innych i współpracę w zespole klasowym;
- angażowanie się w sprawy społeczne;
- realizację projektów interdyscyplinarnych;
- stosowanie zasad współżycia społecznego;
- pełnienie ważnych ról w zespole;
- ocenę koleżeńską;
- osiąganie kompromisu.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje w zakresie przedsiębiorczości poprzez:

- inicjowanie projektów i kreowanie pomysłów;
- planowanie i organizowanie pracy zespołowej w realizacji projektów;
- odpowiedzialne realizowanie zadań;
- otwartość na idee i pomysły;
- wspólne podejmowanie decyzji;
- umiejętność negocjowania;
- prezentowanie efektów swojej pracy;
- promocję projektów edukacyjnych.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

- **Kompetencje w zakresie świadomości i ekspresji kulturalnej** poprzez:
- układanie zadań w formie graficznej;
- plastyczne przedstawianie rozwiązań problemów;
- układanie zagadek i rebusów matematycznych.

Sposoby rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów, a także posiadanie zdolności i chęci wykorzystywania istniejącego zasobu wiedzy i metod do wyjaśniania świata przyrody, po to by formułować pytania i wyciągać wnioski oparte na dowodach.

Konieczna wiedza w dziedzinie matematyki obejmuje:

- znajomość miar i struktur, podstawowych operacji i sposobów prezentacji matematycznej;
- rozumienie terminów i pojęć matematycznych;
- świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź;
- umiejętność stosowania podstawowych zasad i procesów matematycznych w codziennych kontekstach prywatnych i zawodowych;
- śledzenie i ocenianie ciągów argumentów;
- zdolność rozumowania w sposób matematyczny;
- rozumienie dowodu matematycznego;
- komunikowanie się językiem matematycznym;
- solidną umiejętność liczenia;
- korzystanie z odpowiednich pomocy, w tym danych statystycznych i wykresów;
- rozumienie matematycznych aspektów cyfryzacji;
- chęć szukania argumentów i oceniania ich zasadności.

Aktywność uczniów na lekcjach matematyki

Znaczenie kompetencji matematycznych powinno być rozumiane jako zdolność rozwijania i wykorzystywania przez uczniów myślenia i postrzegania matematycznego, co ma przyczynić się do kształtowania ich samodzielności, innowacyjności i kreatywności.

W teorii wielostronnego nauczania – uczenia się Wincenty Okoń wyróżnia trzy rodzaje aktywności człowieka (Okoń, 1987):

- **Aktywność intelektualna** – związana z przyswajaniem wiadomości z gotowych źródeł i samodzielnym odkrywaniem wiedzy przez rozwiązywanie problemów.
- **Aktywność emocjonalna** – warunkująca uczenie się przez przeżywanie, wzbudzanie emocji towarzyszących poznawaniu, jak i wytwarzaniu wartości poznawczych.
- **Aktywność praktyczna** – zakładająca uczenie się przez działanie, wprowadzenie uczniów w świat własnej twórczości technicznej, przygotowanie do rozwiązywania nowych problemów, działania dywergencyjnego w dziedzinie techniki, ekonomii i w zakresie pracy produkcyjnej.

Wspomaganie rozwoju myślenia matematycznego

Wiek XXI to czas ogromnego postępu technologicznego, dlatego uznaje się, że na ogólny zarys wiedzy, postaw i umiejętności człowieka powinny składać się:

- Krytyczne myślenie w rozwiązywaniu problemów.
- Argumentacja, analiza, interpretacja, synteza informacji.
- Umiejętności i praktyki badawcze.
- Kreatywność, artyzm, ciekawość, wyobraźnia, innowacja, osobista ekspresja.
- Wytrwałość, planowanie, samokierowanie, samodyscyplina, umiejętność dostosowania, inicjatywa.
- Ustna i pisemna komunikacja, publiczne przemowy i prezentacje, słuchanie.
- Przywództwo, praca zespołowa, współpraca, możliwość użycia przestrzeni wirtualnej.
- Umiejętności związane z technologią informacyjną i komunikacyjną (ITC).
- Analiza danych i programowanie komputerowe.
- Wiedza o etyce, sprawiedliwości społecznej, postawie obywatelskiej.
- Biegłość w ekonomii i finansach, przedsiębiorczość.
- Świadomość globalna.
- Zdolności związane z naukami ścisłymi i ich metodami oraz argumentowania.

W celu optymalizacji kształcenia od nauczyciela matematyki wymaga się stosowania na II etapie edukacyjnym takich strategii nauczania, które posłużą nabywaniu tych kompetencji przez uczniów.

Strategie uczenia się

Wincenty Okoń zdefiniował cztery drogi, zwane też strategiami uczenia się (Okoń, 1987):

Strategia A – asocjacyjna, uczenie się przez przyswajanie

Czynności nauczyciela:

- przygotowanie uczniów do pracy poprzez zaznajomienie ich z celami i zadaniami lekcji;
- podanie uczniom nowego materiału;
- synteza przekazywanych uczniom wiadomości w celu ich zebrania i utrwalenia;
- kontrola stopnia opanowania przez uczniów wiadomości w celu wykrycia luk i oceny trwałości i operatywności wiedzy;
- zastosowanie wiedzy, wyznaczenie ćwiczeń i zadań.

Strategia A – asocjacyjna, uczenie się przez przyswajanie

Czynności ucznia:

- w wyniku pozytywnej motywacji zaznajamianie i przyswajanie nowych wiadomości;
- kojarzenie nowych wiadomości z już posiadanymi;
- usystematyzowanie i utrwalenie wiedzy;
- samokontrola i samoocena;
- likwidowanie luk i braków w wiadomościach i umiejętnościach;
- posługiwanie się nową wiedzą w celu zdobycia umiejętności.

Strategia P – problemowa, uczenie się przez odkrywanie

Czynności nauczyciela:

- organizowanie sytuacji problemowej, formułowanie problemu, zwłaszcza wtedy, gdy uczniowie nie są w stanie sami tego uczynić;
- udzielanie uczniom niezbędnej pomocy w procesie wytwarzania hipotez i ich weryfikowania;
- kierowanie myśleniem i działaniem uczniów w fazie sprawdzania rozwiązań;
- kierowanie procesem systematyzowania i utrwalania wiedzy zdobytej przez uczniów w toku rozwiązywania problemów;
- organizowanie prac służących zastosowaniu wiedzy zdobytej przez uczniów.

Strategia P – problemowa, uczenie się przez odkrywanie

Czynności ucznia:

- uświadomienie sobie określonej trudności o charakterze praktycznym lub teoretycznym;
- formułowanie problemu będącego zadaniem badawczym oraz gromadzenie niezbędnych wiadomości o przedmiocie badań;
- formułowanie i uzasadnianie hipotez jako podstawy przewidywań projektu rozwiązań;
- weryfikacja słuszności przewidywań na drodze eksperymentów, działań praktycznych i analiz porównawczych;
- formułowanie rozwiązań i wniosków końcowych oraz uporządkowanie i utrwalenie wiadomości, stosowanie wiedzy w rozwiązywaniu nowych problemów.

Strategia E – emocjonalna, uczenie się przez przeżywanie

Czynności nauczyciela:

- nawiązanie i ukierunkowanie kontaktu z dziełem, eksponowanie dzieła;
- kierowanie myśleniem uczniów, dyskusją, uogólnianiem.

Czynności ucznia:

- zetknięcie z dziełem, wartością, emocjonalne przeżywanie określonych wartości i ich przyswajanie;
- analiza problemowa dzieła, dyskusja na temat jego podstawowych wartości;
- formułowanie wniosków praktycznych dotyczących postaw własnych.

Strategia O – operacyjna, uczenie się przez działanie

Czynności nauczyciela:

- uświadomienie celu i znaczenia działania;
- ustalenie reguł, zasad działania;
- pokaz wzorowo wykonanego działania wraz z jego objaśnieniem;
- kontrola, korekta i ocena działania.

Strategia O – operacyjna, uczenie się przez działanie

Czynności ucznia:

- poznanie celu działania;
- powstanie pozytywnej motywacji;
- przypomnienie lub przyswojenie reguł, zasad działania;
- obserwacja wzoru działania;
- kształtowanie się w świadomości ucznia modelu działania;
- pierwsze próby działającego modelu – kontrolowanie i korygowanie;
- ćwiczenia w samodzielnym wykonywaniu działań.

Klasowy maraton matematyczny

Regulamin maratonu (możliwy do modyfikacji):

- Do klasowego maratonu matematycznego mogą przystępować uczniowie klas IV–VIII szkół podstawowych.
- Klasowy maraton matematyczny trwa od października do czerwca w każdym roku szkolnym.
- Do maratonu można przystąpić w dowolnym momencie i robić dowolnie długie przerwy.
- Pierwszego dnia miesiąca publikowane są 4 zadania, do których rozwiązania wystarcza wiedza z matematyki na poziomie szkoły podstawowej.

Klasowy maraton matematyczny

- Rozwiązania dowolnej liczby bieżących zadań należy przekazywać nauczycielowi matematyki do końca danego miesiąca.
- Rozwiązania zadań oceniane są zero-jedynkowo. Dopuszczalne jest przyznawanie połówek punktu.
- Do piątego dnia każdego miesiąca publikowane są odpowiedzi i wskazówki do rozwiązań zadań z ostatniej rundy ligi, a do dziesiątego dnia – wyniki uczestników i ich aktualny ranking ustalony na podstawie sumy punktów z poszczególnych miesięcy.
- Na zakończenie każdej edycji najlepsi zawodnicy oraz autorzy wyjątkowo ciekawych rozwiązań w poszczególnych miesiącach otrzymują np. ocenę celującą z matematyki.

Klasowy maraton matematyczny

Przykładowe zadania:

1. Na ile sposobów można uporządkować liczby naturalne od 1 do 100, tak aby dokładnie 97 z nich znajdowało się na miejscu odpowiadającym tej liczbie?
2. Dwa pola pszenicy, jedno czterokrotnie większe od drugiego, są koszone przez pewną liczbę kombajnów zbożowych. Większe pole wszystkie kombajny koszą półtora dnia, następnie połowa z nich zaczyna kosić mniejsze pole, a pozostała połowa kombajnów nadal kosi duże pole. Na koniec drugiego dnia większe pole jest skoszone, a mniejsze musi być koszone jeszcze przez 3 kombajny przez jeden dzień. Ile kombajnów brało udział w koszeniu pierwszego dnia?
3. Jaka jest największa możliwa wartość największego wspólnego dzielnika trzech różnych liczb całkowitych dodatnich, których suma wynosi 2015?

Realizacja różnych strategii uczenia się

- ***Kółko Lingwistyki Matematycznej*** – przygotowuje w osobnych grupach uczniów klas VII–VIII SP do udziału w konkursie „Wieża Babel” oraz licealistów – do Olimpiady Lingwistyki Matematycznej.

- ***Kółko Geometrii Elementarnej*** – przygotowuje uczniów klas VII–VIII SP i licealistów do konkursów i olimpiad w zakresie zadań z geometrii syntetycznej, w szczególności do Mistrzostw Polski w Geometrii Elementarnej.

- ***Ciekawa Matematyka*** – kółko dla uczniów klas VII–VIII SP i licealistów, prezentuje bardziej zaawansowane tematy, które dają szerszy ogląd matematyki, np. liczby zespolone, całki, liczby kardynalne itp.

- ***Klub Matematycznego Origami*** – kółko, które proponuje nauczanie rozmaitych technik wykonywania modeli matematycznych płaskich i przestrzennych w technice origami, przygotowuje do konkursów origami, w tym Ogólnopolskiego Konkursu Matematycznego Origami „Żuraw".

Zadania do wyboru przez uczniów, w zależności od preferowanego stylu uczenia się

Aktywność ucznia na lekcji determinują treści nauczania, motywacja do nauki oraz właściwa postawa nauczyciela, w tym tworzenie przez niego niezbędnych warunków, a także wykorzystywanie różnych sprzyjających nauce okazji.

Pasję badawczą ucznia stymuluje przede wszystkim adekwatne do poziomu jego umiejętności zadanie, wywołujące zaciekawienie, zaangażowanie i aktywność twórczą. W powstawaniu uczniowskich pomysłów rola nauczyciela polega na dbałości o różnorodność rozpatrywanych przypadków i wnikliwości obserwacji.

Inicjatywy, które mogą być podejmowane przez nauczyciela:

- Nagram film na temat prostopadłościanów i sześcianów w otoczeniu.
- Opracuję komiks dotyczący pola powierzchni i objętości graniastosłupa.
- Stworzę plakat na temat dodawania i odejmowania ułamków o różnych mianownikach.
- Przygotuję słownik pojęć dotyczący trójkątów i czworokątów.
- Wykonam makietę mojego osiedla w określonej skali.
- Napiszę opowiadanie o cechach podzielności liczb.
- Opracuję grę, w której obliczę kwadraty i sześciany liczb naturalnych.
- Przeprowadzę eksperyment zmian temperatury, w zależności od pory dnia.
- Narysuję plan miasta, w którym wykorzystam proste równoległe i proste prostopadłe.
- Opracuję w arkuszu kalkulacyjnym wykresy słupkowe i kołowe.
- Ułożę zadania i łamigłówki do samodzielnego rozwiązania.
- Napiszę algorytm obliczania pól figur płaskich.
- Wykorzystam program GeoGebra do rysowania siatek graniastosłupów.

Test inteligencji wielorakich

W celu określenia poziomu umiejętności matematycznych uczniów warto przeprowadzić test inteligencji wielorakich, który bada m.in. poziom inteligencji matematyczno-logicznej (zwanej też numeryczno-logiczną). Ten typ inteligencji jest przypisany ludziom zaciekawionym światem abstrakcji i precyzji logicznego myślenia.

Test badający poziom inteligencji powinien dotyczyć zagadnień takich jak:

- Rozwiązywanie zagadek i problemów logicznych.
- Liczenie w pamięci, szacowanie i mierzenie.
- Wyszukiwanie połączeń pomiędzy zagadnieniami.
- Zainteresowanie przedmiotami ścisłymi i technicznymi.
- Umiejętność właściwego planowania czasu.
- Przedstawianie precyzyjnych wyjaśnień.

Jeśli u ucznia dominuje inteligencja matematyczno-logiczna, wówczas uczeń:

- potrafi szeregować, wnioskować i klasyfikować zgodnie z jakąś zasadą lub cechą;
- jest dociekliwy;
- lub i porządek i precyzyjne instrukcje;
- dostrzega związki przyczynowo skutkowe i myśli logicznie;
- zadaje wiele pytań dotyczących otaczającego świata;
- jest dociekliwy i kreatywnie rozwiązuje problemy;
- poznaje świat poprzez eksperymentowanie i doświadczanie;
- chętnie bawi się w gry logiczne i rozwiązuje zagadki;
- ma uzdolnienia matematyczne;
- jest konkretny;
- bada i zbiera informacje;
- lubi gry, łamigłówki i zagadki;
- potrafi rozwiązywać problemy.

Niezależnie od zmian w podstawie programowej kształcenia ogólnego matematyki
na II etapie edukacyjnym istotne jest, aby nauczyciel:

- wykorzystywał różnorodne metody i formy pracy z uczniem, ze szczególnym uwzględnieniem pracy w terenie;
- stosował zasadę poglądowości i aktywności uczniowskiej;
- odwoływał się do doświadczeń uczniów oraz wiedzy i umiejętności z poprzedniego etapu edukacyjnego;
- korzystał z zasobów biblioteki szkolnej oraz kształtował umiejętności właściwego wykorzystywania zasobów internetowych;
- stwarzał okazje do rozwijania własnych zainteresowań uczniów;
- promował samodzielne docieranie do wiedzy i jej wykorzystywanie w życiu codziennym.

Metody i strategie wykorzystywane w nauczaniu matematyki

Kształcenie kooperatywne (*Cooperative Learning*)

Strategia wymagająca dokonania pewnej rekonstrukcji myślowej, umożliwiająca uczniom znalezienie rozwiązania, uzyskanie odpowiedzi w procesie swoistej wymiany informacji, związanej z wyobrażeniami tego samego fragmentu rzeczywistości.

Strategia ta:

- Powoduje wykształcenie się w przyszłości refleksyjnej postawy odbioru rzeczywistości, ale także wykorzystanie dotychczasowych jej ocen.
- Jest przeprowadzana poprzez poszerzoną refleksję osoby uczącej się i dyskusję z pozostałymi uczniami.
- Czyni nauczyciela uczestnikiem procesu, doradcą, który wyszukuje i kształtuje aktywne środowisko nauczania.
- Zakłada, że styl uczenia się jest otwarty i oparty na sieciowym powiązaniu między uczestnikami interakcji.
- Stanowi odniesienie do współdziałania nauczyciela przedmiotu oraz nauczyciela wspierającego.

Kształcenie wyprzedzające (forma kształcenie kooperatywnego)

Istotą tej strategii jest zaktywizowanie uczniów przed lekcją w formie samodzielnego zbierania informacji i odniesień do własnej dotychczasowej wiedzy.
Uczniowie korzystają ze zdobytych doświadczeń, przypuszczeń, związków emocjonalno-poznawczych oraz wiedzy potocznej, aby zrozumieć nowy materiał i nadać mu osobiste znaczenie.
Tak przygotowany uczeń uczestniczy następnie w lekcji, przedstawiając swoją skonstruowaną wiedzę, a zadaniem nauczyciela jest inspirowanie go zadaniami do systematyzacji i utrwalenia opanowanych wiadomości.

Realizacja strategii kształcenia wyprzedzającego odbywa się w następujących etapach:

- Aktywacja uczniów poprzez weryfikację tego, co uczniowie już wiedzą, jakie zna-ją pojęcia, jak wyglądają ich spostrzeżenia i wyobrażenia w zakresie poznawanych pojęć.
- Przetwarzanie, rozwiązywanie zadań dydaktycznych, zaaranżowanych przez nauczyciela, ale bez jego bezpośredniej obecności i kontroli, tworzenie materiałów, prezentowanie osiągnięć (strony www, e-portfolio, prezentacje multimedialne, filmy czy animacje).
- Systematyzacja realizowana na lekcji, podczas której nauczyciel nie pełni roli wykładowcy, ale jedynie uzupełnia, interpretuje, systematyzuje i odpowiada na pytania w taki sposób, aby uczniowie mogli dokonać korekty swoich dotychczasowych nota-tek, portfolio i opracowanych przez siebie materiałów oraz stron www.
- Ocena i ewaluacja, podczas której uczniowie oceniają swoją pracę i osiągnięcia, a nauczyciel weryfikuje ją na podstawie kryteriów opracowanych w porozumieniu z uczniami.

PBL (Problem Based Learning)

Metoda polega na nauczaniu poprzez rozwiązywanie problemów, dotyczy uczniów, którzy pracują w małych grupach.

W procesie tym akcentuje się ścisły związek problemu z zadaniem, które należy rozwiązać poprzez poszukiwanie informacji i jej przetwarzanie, refleksję, krytyczną ocenę i wartościowanie zdobytych informacji pod kątem ich efektywności i przydatności do rozwiązania problemu.
Co istotne, formułowanie zadań rozwiązywanych metodą PBL, wykorzystujących wiedzę między przedmiotową, stymuluje zainteresowania innymi obszarami nauki oraz pozwala dostrzec praktyczny wymiar zagadnień teoretycznych realizowanych w szkole.

Do głównych zalet **metody PBL** należą:

- Rozwijanie umiejętności efektywnej współpracy w grupie i empatycznej komunikacji.
- Stosowanie odpowiednich strategii negocjacyjnych.
- Nabywanie doświadczeń w podejmowaniu przemyślanych decyzji.
- Budowanie zdrowej rywalizacji w grupie.
- Rozwijanie kreatywności i uczenie się odpowiedzialności.
- Pełnienie przez nauczyciela roli opiekuna, który pomaga w podejmowaniu decyzji, pilnuje terminów, pracuje nad starannym doborem tematów zadań i stopniem ich trudności.
- Pełnienie przez nauczyciela funkcji przewodnika, który organizuje pracę nad projektem w początkowej fazie, a następnie roli moderatora wspomagającego, który nie podaje gotowych rozwiązań.
- Dzielenie się efektami pracy przez zespoły projektowe.
- Możliwość dyskutowania nad przedstawionymi efektami przez wszystkich uczniów i nauczyciela.

Metoda PBL staje się nieodzownym elementem szkoły XXI wieku.
Jej wykorzystanie na lekcjach matematyki pozwala zbliżyć działania realizowane w szkole do tych z codziennego życia, uczy młodych ludzi odpowiedzialności za podejmowanie decyzji, samodzielnego myślenia i odwagi eksperymentowania, co w znaczącym stopniu przyczynia się do pogłębiania wiedzy uczniów.

Odwrócona klasa

Metoda, która inspiruje ucznia do samodzielnego poszukiwania, zwiększa odpowiedzialność za wykonywane zadania oraz wspomaga jego zaangażowanie. Wymaga umiejętności planowania, przewidywania rezultatów, monitorowania i oceny efektów oraz negocjowania i moderowania.

Metoda realizowana jest w kilku etapach:

- Przygotowanie materiałów polegające na poszukiwaniu źródeł przez nauczyciela lub samodzielnym ich zapewnieniu przez uczniów.
- Przedstawienie uczniom problemu podczas poprzedniej lekcji.
- Zadanie uczniom pracy do domu, polegającej na zapoznaniu się z materiałami przy-gotowanymi przez nauczyciela lub samodzielnym ich poszukiwaniu.
- Samodzielne zdobywanie wiedzy przez uczniów w domu w formie pracy indywidualnej lub zespołowej.
- Ocena poziomu zrozumienia materiału na podstawie porządkowania, weryfikacji i zastosowania w zadaniach zdobytych wiadomości.
- Sprawdzenie osiągnięcia celów poprzez wspólne omówienie z uczniami zdobytej wiedzy, umiejętności i ich dalszego wykorzystania.

Wdrożenie **metody odwróconej klasy** na lekcjach matematyki niejednokrotnie pozwala na zminimalizowanie czasu wprowadzenia tematu lekcji i wyjaśnienia podstaw omawianego zagadnienia.

Jest to również okazja do przyjęcia przez ucznia współodpowiedzialności za proces własnego rozwoju, stworzenia kreatywnej przestrzeni do współpracy i realizacji powierzonych zadań.

Pozytywnym aspektem wdrożenia metody jest także umożliwienie uczniom łatwego nadrobienia zaległości w domu i poświęcenie przez nauczyciela matematyki więcej czasu uczniom ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.

Metoda zadań programowanych

Metodę tę można zastosować w kilku krokach:

- Stworzenie rodzaju grafu, w którym węzłami są treści nauczania wraz z pytaniami końcowymi.
- Wybór następnego elementu do nauki zależnego od udzielonych odpowiedzi.
- Szybsze przechodzenie przez ucznia do bardziej zaawansowanych elementów, jeśli jego odpowiedzi są prawidłowe.
- Przy słabszych odpowiedziach – przechodzenie przez ucznia do materiałów uzupełniających i dokładniej wyjaśniających.

Gry dydaktyczne na lekcjach matematyki

Zgodne z poglądem W. Okonia gra dydaktyczna jest odmianą zabawy polegającą na ścisłym przestrzeganiu ustalonych wcześniej reguł, wymagającą wysiłku myślowego (Okoń, 1981). W grze najbardziej istotny jest konstytuujący ją element emocjonalny, pewien stopień napięcia, który wynika z samej zabawy, rywalizacji i chęci wygranej

Wymienia się następujące cechy gry dydaktycznej:

- celowo organizowana sytuacja dydaktyczna, która pozwala osiągnąć założone cele dydaktyczno-wychowawcze;
- aktywność uczących się;
- interakcje między uczącymi się;
- pierwiastek rywalizacji – konkurencja między uczestnikami gry;
- dokładnie określone reguły;
- charakter zabawy, w której uczestniczenie stanowi dla uczącego się swego rodzaju przyjemność.

Gry dydaktyczne jako metoda aktywizująca uczniów powinny być w szkole wykorzystywane bardzo często, ponieważ są formą pracy indywidualnej lub grupowej, której celem jest zdobywanie i utrwalanie nowej wiedzy.

Gry dydaktyczne na lekcjach matematyki

Gry dydaktyczne, jako metoda aktywizująca uczniów powinny być w szkole wykorzystywane bardzo często, ponieważ są formą pracy indywidualnej lub grupowej, której celem jest zdobywanie i utrwalanie nowej wiedzy.

Wśród gier dydaktycznych można wyróżnić:

- quizowo-turniejowe;
- planszowe;
- sytuacyjne;
- decyzyjne;
- inscenizacyjne;
- komputerowe, np. logiczno-optymalizacyjne.

Gry dydaktyczne na lekcjach matematyki

Przy pomocy gier dydaktycznych aktywizowane są różne funkcje poznawcze, takie jak: procesy myślenia, czyli tworzenie jednostek poznawczych w postaci schematów, obrazów umysłowych, symboli i pojęć, oraz kształtowanie się operacji logicznych, wyjaśnień i ocen.
Gry dydaktyczne mają duże zastosowanie w rozwijaniu zdolności wskazywania różnych zależności i związków przyczynowo skutkowych.
Podczas gier i zabaw dzieci przyswajają sobie różne reguły, zapamiętują je i stosują w odpowiednim momencie.
Gry sprawdzające wiadomości i umiejętności pozwalają zredukować poziom stresu towarzyszący klasycznym metodom sprawdzania i oceniania.
Stosowanie gier dydaktycznych na lekcjach matematyki ma sens, gdy wartość gry polega na realizacji określonych zamiarów dydaktycznych.

Wybrane przykłady

- Wybrane przykłady są zamieszczone w pliku o nazwie zadania do **strategii kształcenia myślenia w pracy z uczniem na drugim etapie edukacyjnym.**

Literatura

- www.ore.pl/matrialyszkołycwiczen
- Tomasz Wójtowicz. Doskonalenie warsztatu pracy nauczycieli szkół ćwiczeń w kontekście rozwijania myślenia matematycznego uczniów na II etapie edukacyjnym. Ośrodek Rozwoju EdukacjiWarszawa 2021

Dziękuję za uwagę
Życzę efektywnej pracy

Wizualizacja pojęć i zagadnień matematycznych. Sposoby na atrakcyjne materiały dydaktyczne na lekcjach matematyki.

Justyna Biernacka
Doradca metodyczny ds. matematyki
CRE WŁ w Skierniewicach

Cele szkolenia

- Doskonalenie kompetencji nauczycieli w zakresie posługiwania się przykładowymi programami multimedialnymi sprzyjającymi wizualizacji pojęć matematycznych
- Doskonalenie stosowania metod twórczego rozwiązywaniu problemów matematycznych
- Wymiana doświadczeń
- Przykłady dobrej praktyki
- Diagnoza potrzeb Nauczycieli ?

Zakres tematyczny

- Wzmacnianie kreatywności w myśleniu i działaniu.
- Zastosowanie aplikacji programu GeoGebra do wizualizacji pojęć matematycznych oraz własności figur geometrycznych.
- Wykorzystanie zasobów i aplikacji sieciowych.

Wizualizacja

- Wielki matematyk francuski Jacques Hadamard (1865 - 1963) uważał, że myśl matematyczna jest w swojej istocie wizualna. Pierwiastek wizualny jest silnie obecny także we współczesnej matematyce.
- Jest niezaprzeczalnym faktem, że diagramy, rysunki, wykresy, czy wizualizacje komputerowe są szeroko używane w praktyce matematyków.
- Pojawiają się one w czasopismach matematycznych, na tablicach i kartkach papieru. Co więcej, w ostatnich latach komputery otworzyły przed matematykami możliwości wizualizacji o wiele bardziej skomplikowanych obiektów matematycznych niż dotychczas.

GeoGebra

To bezpłatne oprogramowanie matematyczne dla nauczycieli, uczniów, studentów i osób zainteresowanych matematyką.

Łączy w jednym pakiecie opcje algebraiczne, analityczne, geometryczne i statystyczne. Upraszcza symbolicznie wyrażenia algebraiczne, rysuje wykresy, wykonuje dynamiczne konstrukcje geometryczne, ma wbudowany arkusz kalkulacyjny i funkcje statystyczne.

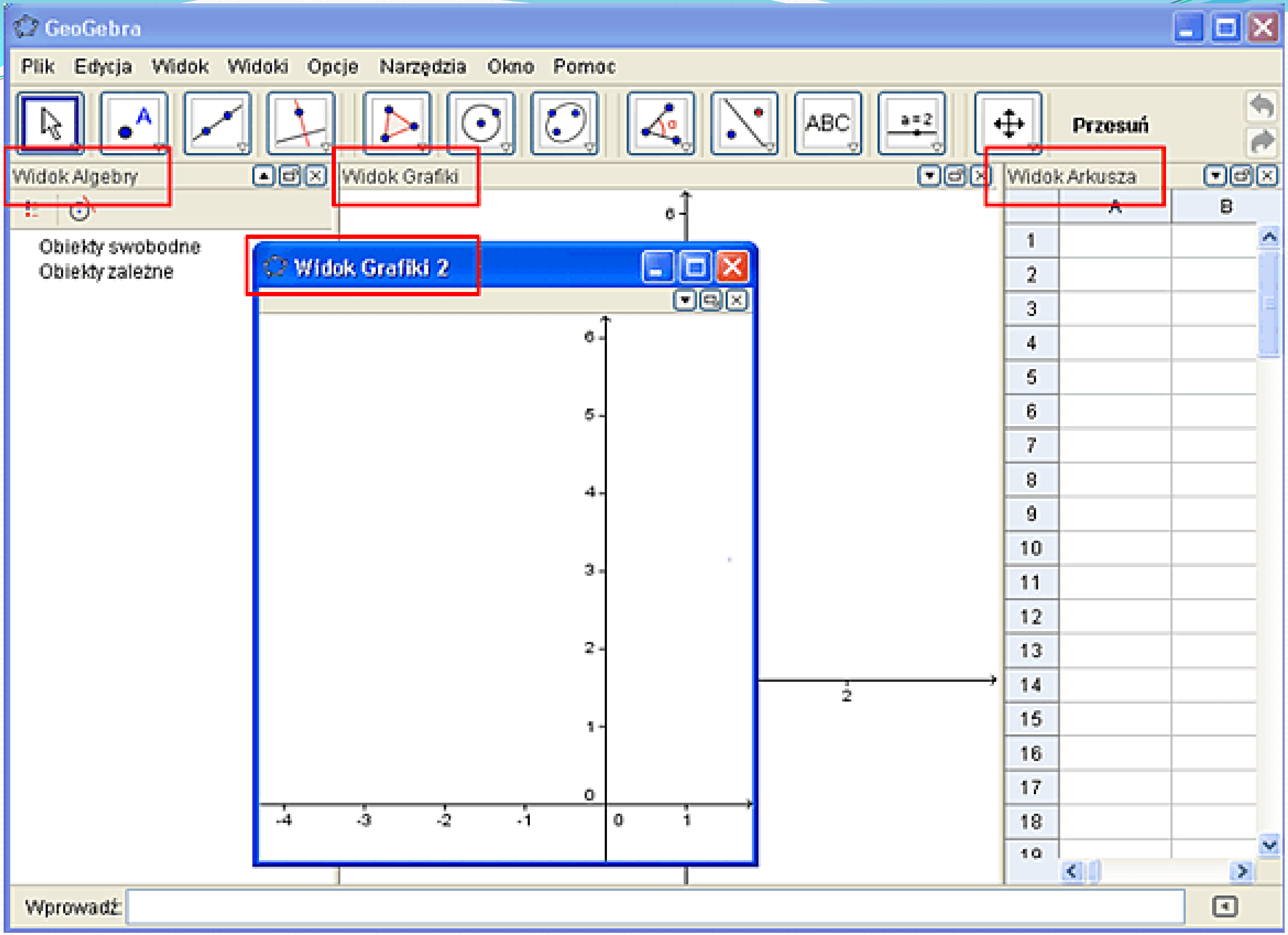
Program może być wykorzystany na wszystkich etapach kształcenia do wizualizacji pojęć i związków matematycznych oraz wykonywania obliczeń (w tym symbolicznego obliczania pochodnych i całek oraz numerycznego wyznaczania ekstremów funkcji).

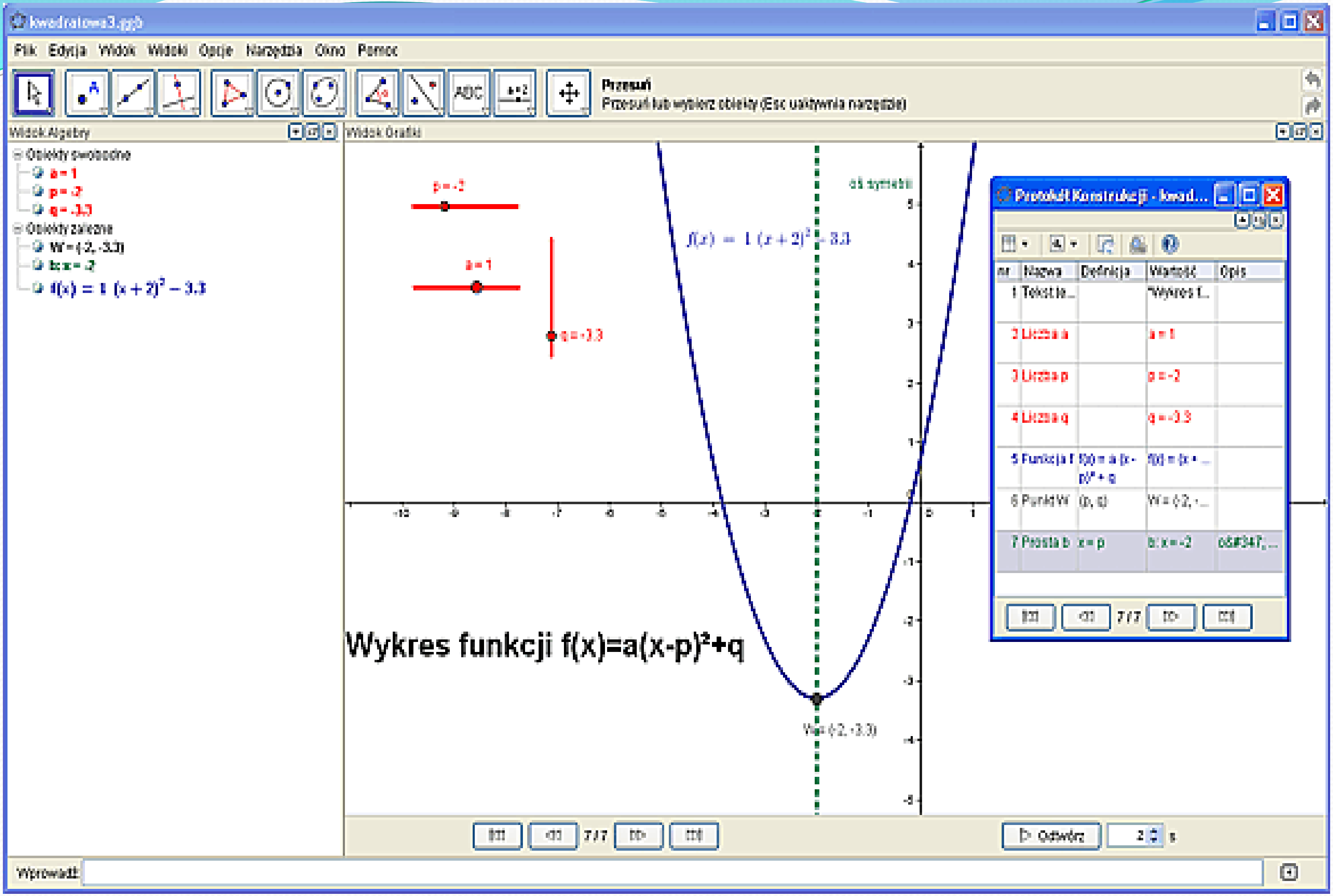
GeoGebra

Użytkownik ma do dyspozycji powiązane ze sobą nawzajem okna: widok grafiki, widok algebry i widok arkusza.

Okna te można uaktywniać w zależności od potrzeb, np. konstrukcje geometryczne można wykonywać myszką i bezpośrednio je obserwować w widoku grafiki lub można wprowadzić algebraiczny zapis obiektów do pola wprowadzania za pomocą klawiatury, a ich zapis algebraiczny i interpretację geometryczną obserwować w widoku algebry i widoku grafiki.

Zaletą programu są wyjątkowo rozbudowane możliwości arkusza kalkulacyjnego, wykorzystywane w statystyce oraz analizie funkcji jednej i wielu zmiennych.


GeoGebra
Plik Edycja Widok Widoki Opcje Narzędzia Okno Pomoc
ABC
a=2
Przesuń
Widok Algebry
Widok Grafiki
Widok Arkusza
Obiekty swobodne
Obiekty zależne
Widok Grafiki 2
A
B
Wprowadź:



kwadratowa3.ggb
Plik Edycja Widok Widoki Opcje Narzędzia Okno Pomoc
Przesuń
Przesuń lub wybierz obiekty (Esc uaktywnia narzędzie)
Widok Algebry
Obiekty swobodne
a = 1
p = -2
q = -3.3
Obiekty zależne
W = (-2, -3.3)
b: x = -2
f(x) = 1 (x + 2)² – 3.3
Widok Grafiki
p = -2
a = 1
q = -3.3
oś symetrii
f(x) = 1 (x + 2)² – 3.3
Wykres funkcji f(x)=a(x-p)²+q
W = (-2, -3.3)
Protokół Konstrukcji - kwad...
Nr Nazwa Definicja Wartość Opis
1 Tekst te... "Wykres f...
2 Liczba a a = 1
3 Liczba p p = -2
4 Liczba q q = -3.3
5 Funkcja f f(x) = a (x - p)² + q f(x) = (x + ...
6 Punkt W (p, q) W = (-2, -...
7 Prosta b x = p b: x = -2 oś#347;...
7 / 7
Odtwórz
Wprowadź:

GeoGebra

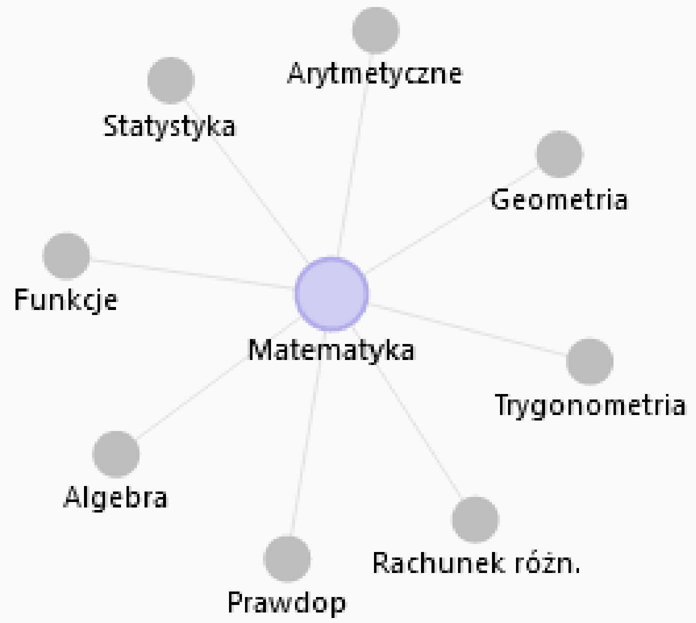
Zastosowanie w szkole:

- arytmetyka
- planimetria
- stereometria
- konstrukcje geometryczne
- równania i układy równań i nierówności
- geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni
- nauka o ciągach i funkcjach
- rachunek różniczkowy i całkowy
- obróbka danych statystycznych
- fizyka i inne przedmioty ścisłe

Matematyka

1) Zasoby szkolne

2) https://www.geogebra.org/t/math

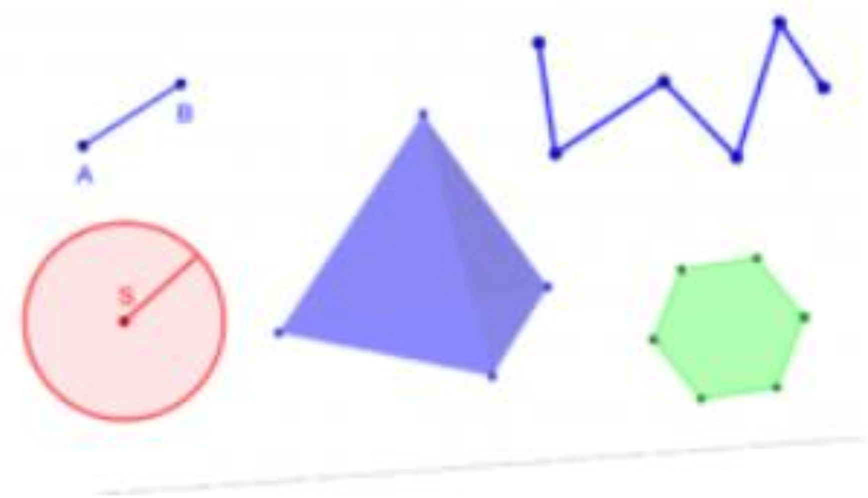


https://www.geogebra.org/m/eeQh6mX2

Matematyka 4 - 8

Autor: Anna Skorupa

Temat: Matematyka



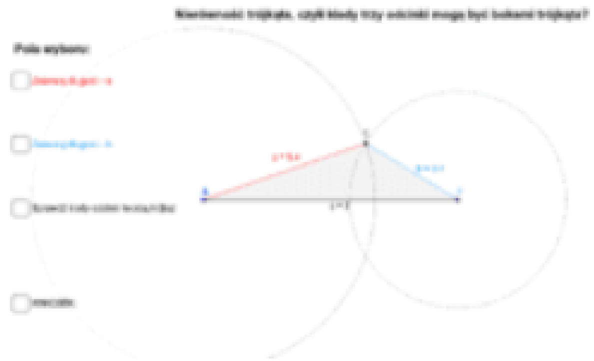
https://www.geogebra.org/m/FwkaX8kn

Pojęcia matematyczne w szkole podstawowej

Autor: Stanisław Szymański

Temat: Ułamki, Procenty

Nierówność trójkąta, wysokości trójkąta, procent, rozszerzanie i skracanie ułamków



https://www.geogebra.org/m/hxanZYer

Szkoła ponadgimnazjalna - Matematyka 1

Autor: e-textbooks.pl

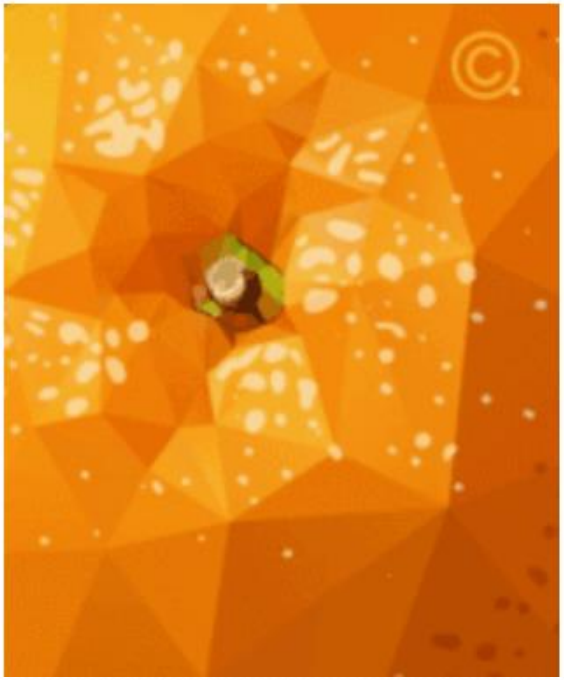
Temat: Matematyka

https://www.geogebra.org/m/kQ8mYGCu

Szkoła ponadgimnazjalna - Matematyka 2

Autor: e-textbooks.pl

Temat: Matematyka

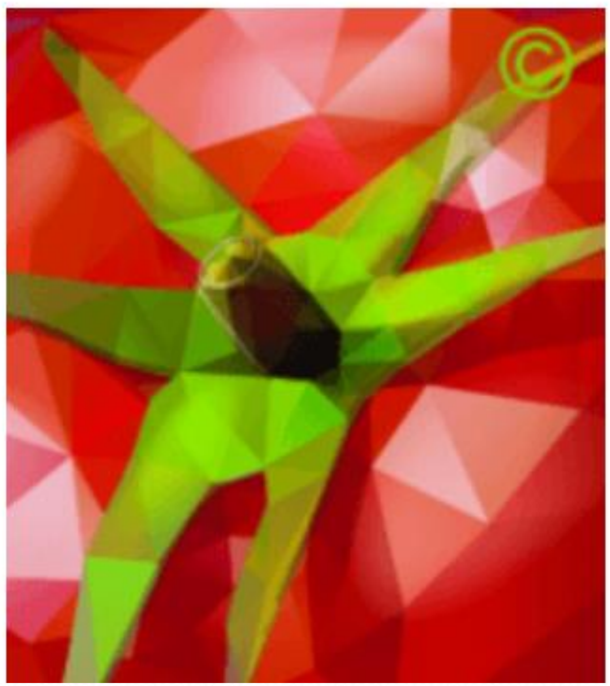


https://www.geogebra.org/m/swZTqbJU

Szkoła ponadgimnazjalna - Matematyka 3

Autor: e-textbooks.pl

Temat: Matematyka



https://www.geogebra.org/m/y5yg6n8r

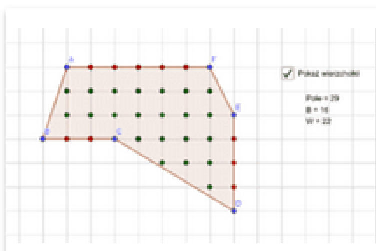
Warsztaty "GeoGebra bardziej zaawansowanie"

Autor: Jerzy Mil

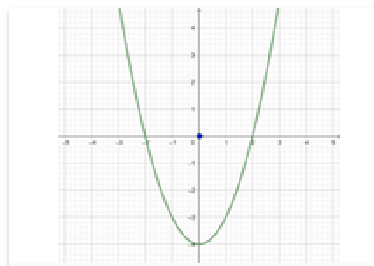
Temat: Arytmetyczne, Ułamki, Funkcje, Wykres funkcji, Matematyka, Liczby, Funkcje wielomianowe, Równania kwadratowe, Liczby wymierne

Materiały na warsztaty prowadzone podczas III Lokalnej Konferencji GeoGebry w Bydgoszczy

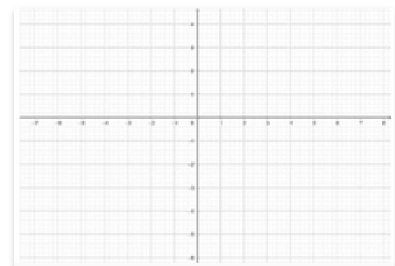
GeoGebra trochę bardziej



Wzór Picka



Wartości funkcji



Narzędzia do rysowania wykresów

https://www.geogebra.org/m/Am953HzH

Gimnazjum - Matematyka 1

Autor: e-textbooks.pl

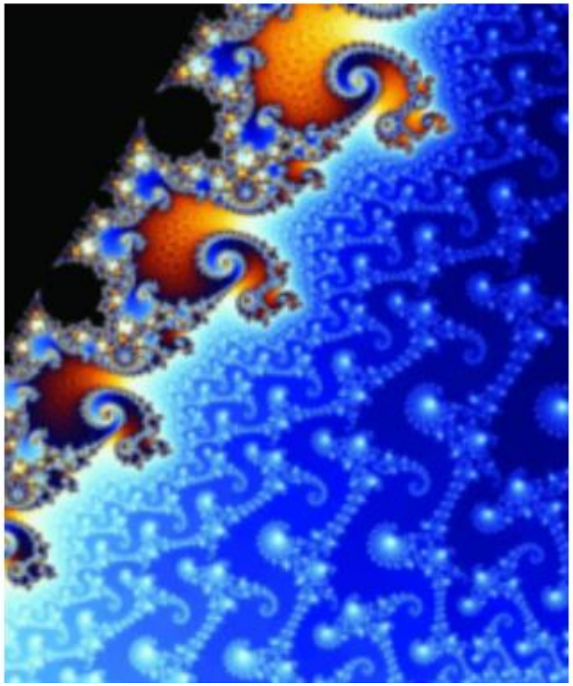
Temat: Matematyka

https://www.geogebra.org/m/YcVPV8ry

Gimnazjum - Matematyka 2

Autor: e-textbooks.pl

Temat: Matematyka



https://www.geogebra.org/m/rwyuH23N

Gimnazjum - Matematyka 3

Autor: e-textbooks.pl

Temat: Matematyka

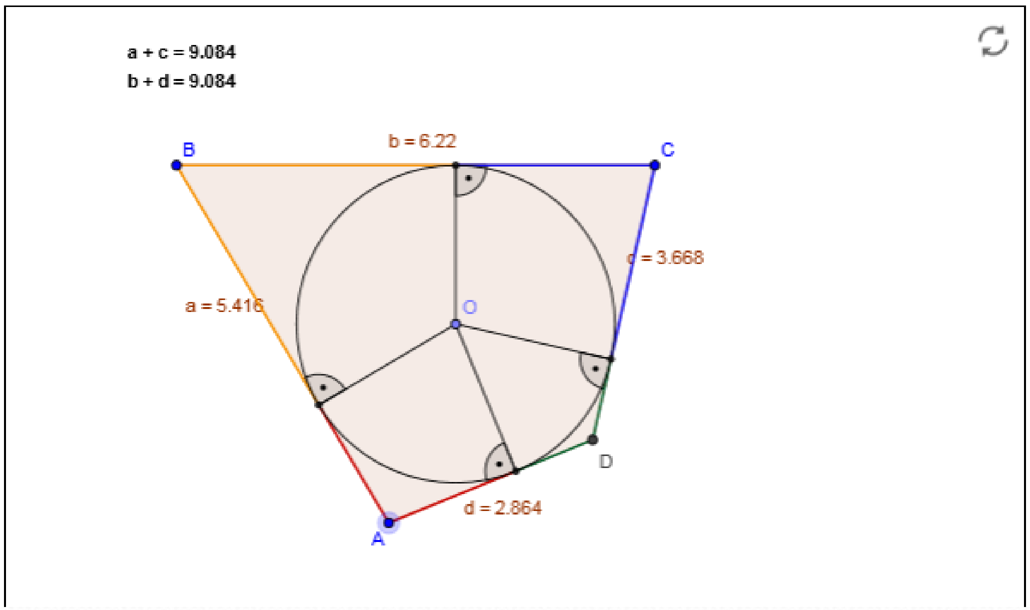
https://www.geogebra.org/m/BCmhaJ8u

Czworokąt opisany na okręgu

Autor: Jerzy Mil

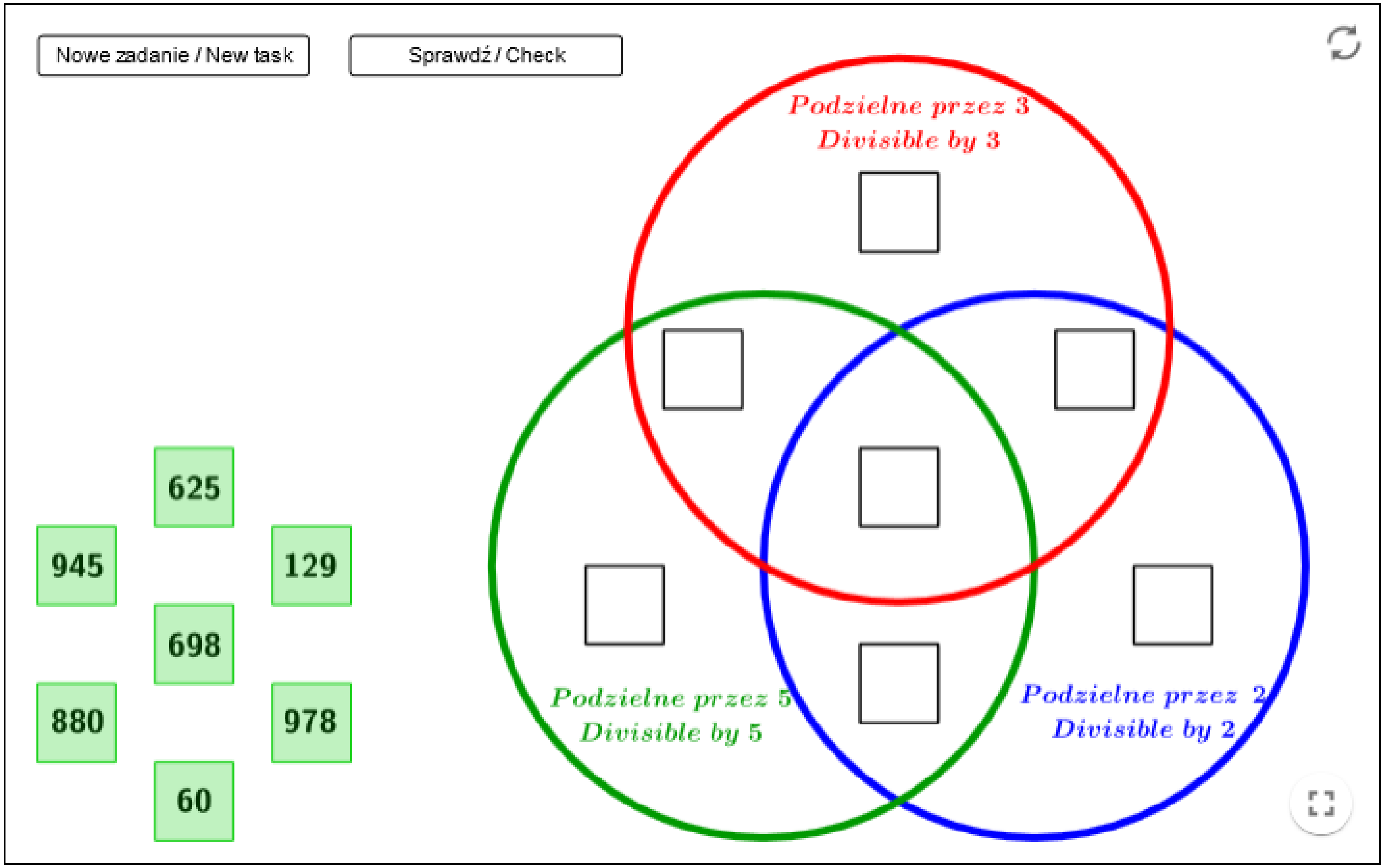
Temat: Okrąg opisany

Jakie własności ma czworokąt opisany na okręgu?

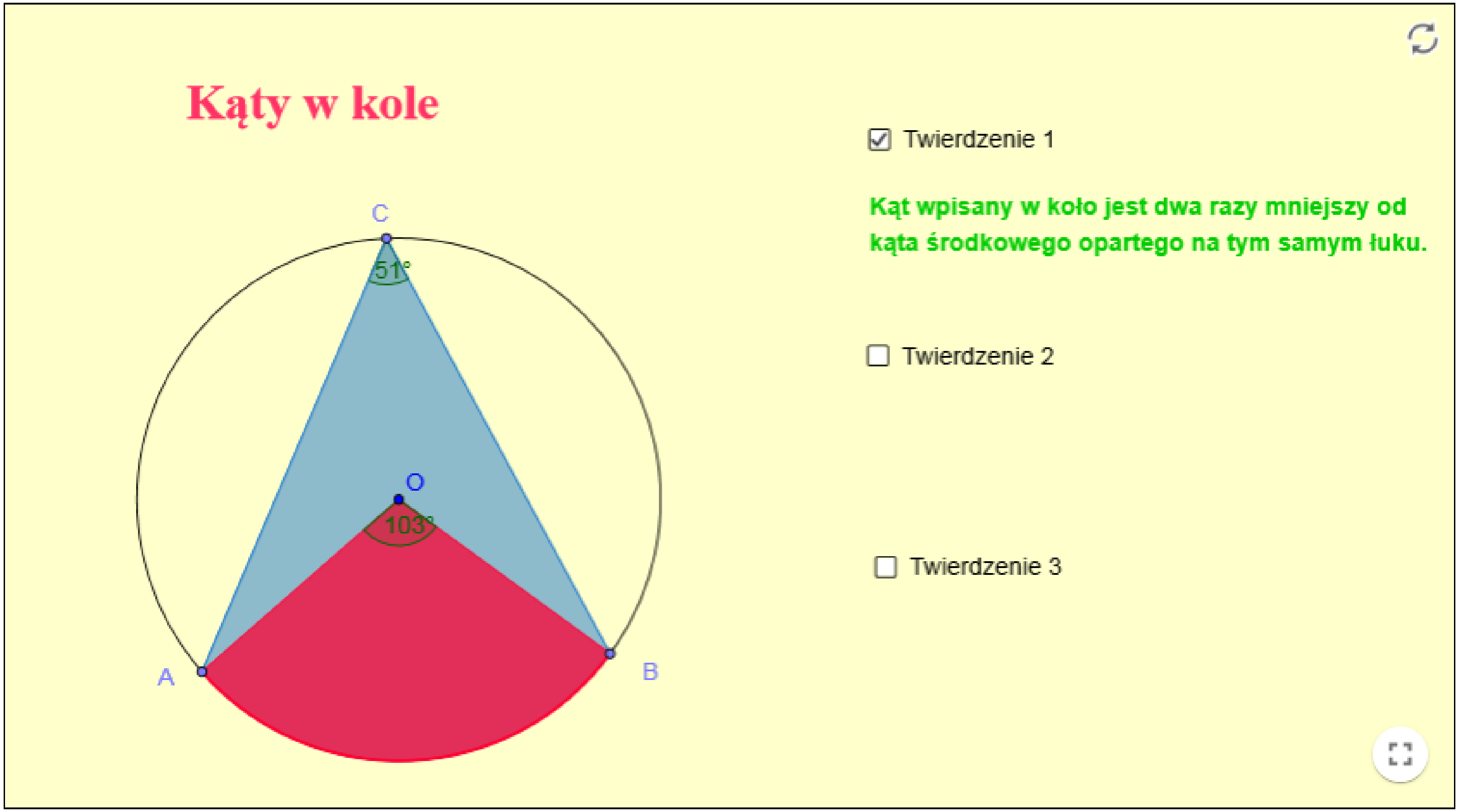


Dielenie przez 2, 3, 4, 5, 9

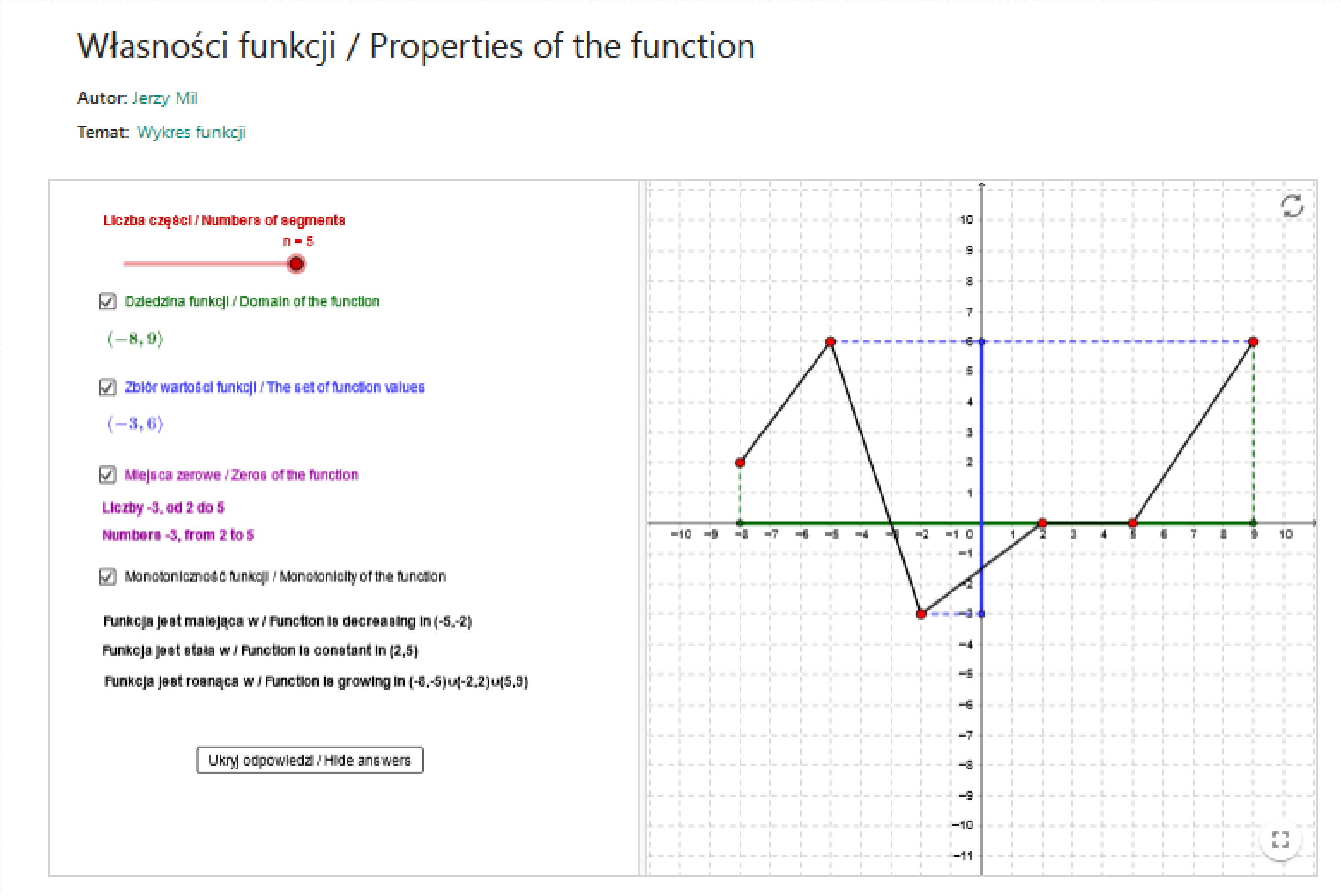
https://www.geogebra.org/m/RbpANjXZ



https://www.geogebra.org/m/WufaTSf2



https://www.geogebra.org/m/DxRaCCZt



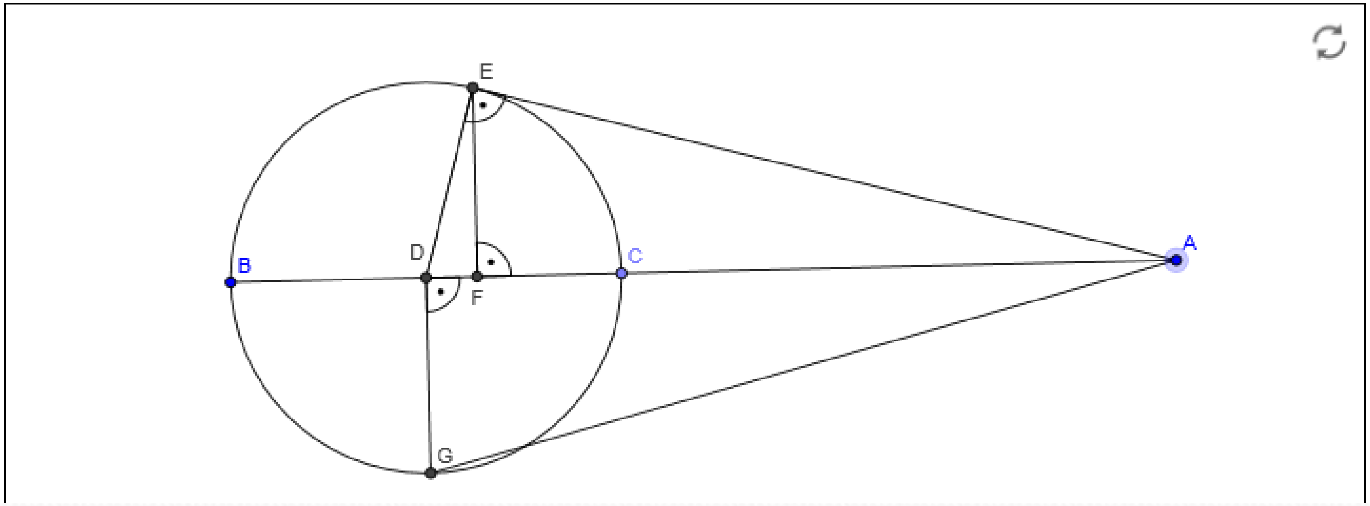
https://www.geogebra.org/m/y2YSgsRE

Zależność między średnimi

Autor: Jerzy Mil

Temat: Pitagoras lub twierdzenie Pitagorasa

1. Sprawdź, czy odpowiednie odcinki mają podaną długość (skorzystaj z tw. Pitagorasa)
2. Porównując długości odcinków określ jakie nierówności opisują zależności między średnią arytmetyczną, geometryczną, harmoniczną i kwadratową.



https://pistacja.tv/egzaminy/przygotowanie-do-probnej-matury-z-matematyki-2022

Przygotowanie do próbnej matury z Pi-stacją 2022

Matematyka

Co roku, zespół Pi-stacji przygotowuje aktualne materiały pomagające przygotować się do nadchodzących egzaminów zewnętrznych z matematyki. Na tej stronie znajdziesz linki do streamów z omówieniami poszczególnych działów, próbne egzaminy organizowane przez Pi-stację oraz porady, jak najlepiej podejść do powtórek przed egzaminami. W każdym z poprzednich lat z naszych darmowych materiałów egzaminacyjnych korzystało kilkadziesiąt tysięcy uczniów. Spróbuj i Ty!

Powtórki ruszają 3 lutego 2022 roku a próbna matura z Pi-stacją jest zaplanowana na 21 kwietnia 2022 roku.

Najbliższy webinar

Liczby rzeczywiste 03.02.2022

- Pobierz zadanie do webinaru (PDF)
- Nie przegap webinaru! Zapisz się na Newsletter
- Udostępnij

Kontakt

- Dziękuję za uwagę

- Życzę wielu pomysłów na zastosowanie podanych przykładów

Przykłady wykorzystania architektury i przyrody w zadaniach matematycznych

Zamieszczone tu zadania pokazują zastosowanie architektury i przyrody w zadaniach matematycznych z uwzględnieniem omówionych wcześniej metod i problemów dydaktyczno-metodycznych. Mogą zostać one wykorzystane podczas zwykłych lekcji przedmiotowych, międzyprzedmiotowych projektów edukacyjnych lub w ramach kół przedmiotowych, które rozwijają kompetencje matematyczne uczniów.

Większość z zadań jest wielopoziomowa – w zależności od scenariusza lekcji można wykorzystać część zadania, rozłożyć go na kilka lekcji lub potraktować jako większą całość, np. w formie projektu.

Planowanie wycieczki

Zadanie problemowe, które daje bardzo duże pole do różnicowania poziomu podzagadnień.

Uczniowie mają zaplanować ramy czasowe i przestrzenne krótkiej wycieczki w pobliże szkoły, może być to zwykłe wyjście do parku, muzeum, kina. Aby nadać zadaniu wymiar konkretnego problemu do rozwiązania, należy wziąć pod uwagę, jaka wycieczka planowana jest w najbliższym czasie, i pod jej kątem przygotować zadanie. Z punktu widzenia przedmiotowego cel dydaktyczny wycieczki jest tu podrzędny, ważna jest znajomość punktu wyjścia, określanego dalej jako punkt A, i punktu docelowego, określanego dalej jako punkt B. W przypadku dzieci młodszych warto operować konkretnymi słowami, czyli punkt A to szkoła, punkt B to park, muzeum, kino...

Można przedstawić uczniom zadanie jako problem do rozwiązania, stawiając pytanie kluczowe, np.

- (bardzo ogólne) W jaki sposób możemy dostać się z punktu A do punktu B?,

- (szczegółowe, narzucające pewne ograniczenia) W jaki sposób możemy dostać się z punktu A do punktu B:
    - » najbezpieczniej,
    - » najszybciej,
    - » wyłącznie pieszo,
    - » środkami komunikacji publicznej,
    - » najładniejszą trasą?

Możliwe pomoce dydaktyczne

- mapa miejscowości,
- rozkłady jazdy autobusów/tramwajów/pociągów,
- zdjęcia interesujących obiektów znajdujących się między punktami A i B.

Formy pracy

- indywidualna (najmniej tutaj polecana),
- w parach,
- grupowa.

Metoda

- realistyczna.

Uwzględniając wiek i umiejętności uczniów, rozwiązywanie problemu można przeprowadzić według trójstopniowej skali trudności. Warto zastosować wariant ogólny – wszyscy uczniowie wykonują zadania na tym samym stopniu trudności lub też w ramach klasy zróżnicować poziom zadań.

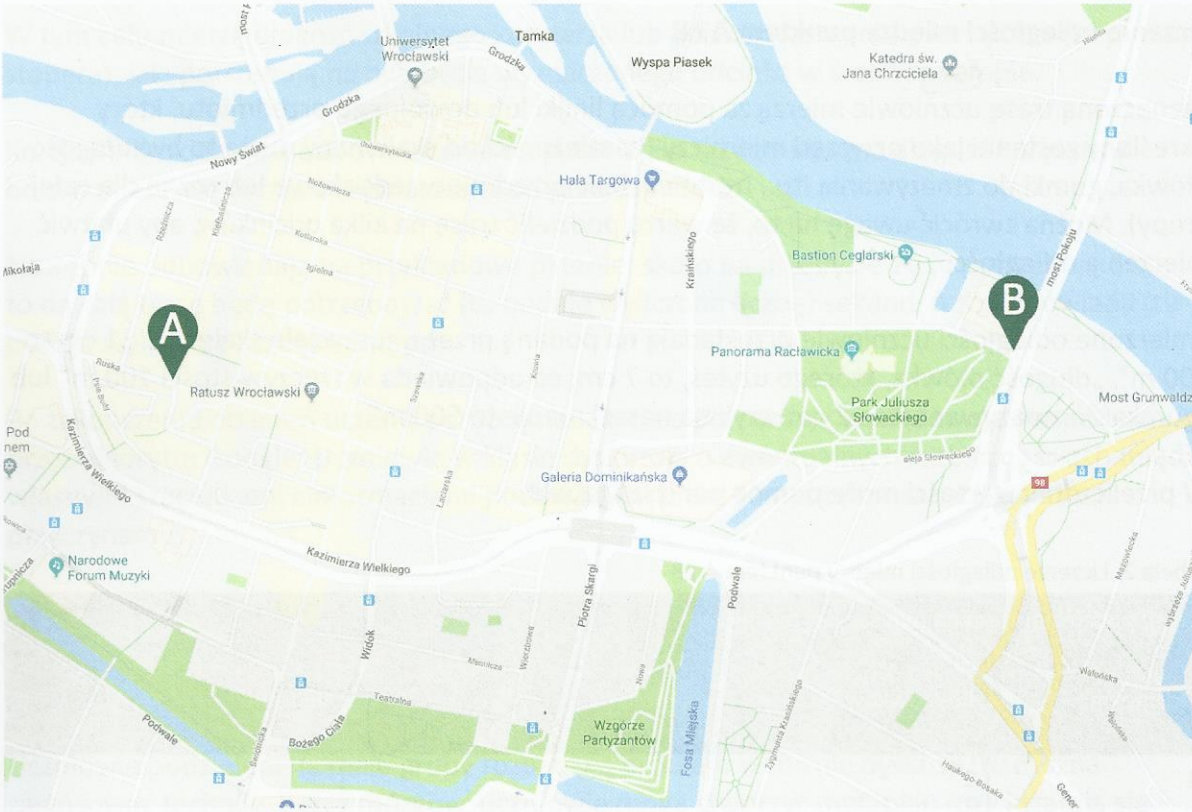
Faza rozwiązywania zadania

Nauczyciel przedstawia uczniom problem, zadaje pytanie kluczowe. Podkreśla fakt, że za jakiś czas wycieczka odbędzie się naprawdę i będą mogli samodzielnie zweryfikować rozwiązania problemu, które zaproponują.

Za pomocą tablicy interaktywnej, na mapie (np. przy użyciu Google Maps) nauczyciel pokazuje uczniom położenie punktów A i B. (Jeśli mamy do czynienia z położeniem któregoś z punktów w przestrzeni zabytkowej, gdzie zachował się charakterystyczny układ ulic, warto zwrócić uwagę na ten fakt, ewentualnie poszukać podobnych relacji w nowocześniejszych rozwiązaniach urbanizacyjnych).

Położenie punktów warto pokazać w ujęciu satelitarnym lub trójwymiarowym. Rozpoznanie znajomych obiektów ułatwia połączenie pojęcia mapy kartograficznej z rzeczywistym obrazem otoczenia.

Przełączenie między funkcjami mapy topograficznej i satelitarnej warto kilkakrotnie powtórzyć, aby uczniowie mieli czas na przyswojenie sobie punktów odniesienia.



Rys. 2. Położenie punktów na mapie

Stopień I

Uczniowie otrzymują wydruk fragmentu mapy, na której naniesione są punkty A i B.

Ich zadaniem jest zaznaczenie trasy między obydwoma punktami, spełniającej wymagania zawarte w pytaniu kluczowym.

Zaznaczenie trasy powinno być poprzedzone dyskusją w parach lub grupach. W zależności od wymagań pytania szczegółowego (np. poruszanie się pieszo lub autem) pewne warianty powinny być przez uczniów zaakceptowane lub odrzucone.

Na koniec nauczyciel wraca do mapy interaktywnej, pokazuje uczniom trasy sugerowane przez algorytmy Google. Uczniowie dyskutują podobieństwa i różnice między ich rozwiązaniami a tym, co widzą na tablicy, zastanawiają się, co jest korzystniejsze i dlaczego.

Stopień II

Uczniowie otrzymują wydruk fragmentu mapy, na której naniesione są punkty A i B.

Ich zadaniem jest zaznaczenie trasy między obydwoma punktami, spełniającej wymagania zawarte w pytaniu kluczowym.

Liczenie odległości między punktem A i B

Zaznaczoną trasę uczniowie mierzą za pomocą linijki lub dowolnego przedmiotu, który określony zostanie jako przyrząd mierniczy (w zależności od skali mapy może to być długość ołówka, gumki do zmazywania itp., można ustalić przedmioty jednakowe lub różne dla całej grupy). Można zwrócić uwagę na to, że warto podzielić trasę na kilka odcinków, aby ułatwić mierzenie odległości.

Zmierzone odległości uczniowie przekładają na podaną przez nauczyciela skalę: np. „1 cm to 200 m", „długość ołówka, którego użyłeś, to 7 cm, co odpowiada w rzeczywistości 100 m" lub „gumka do zmazywania ma 2 cm, czyli na naszej mapie to 500 m".

W przeliczeniu wartości może pomóc poniższa tabela.

Tabela 2. Liczenie odległości między punktem A i B

Trasę podzieliłem/am na (wpisać ile) odcinków			
Odcinek nr.	Ile ołówków?	Ile to cm?	Ile to m?
1	2		
2	5		
3	4		
	Cała trasa to:		
Wszystkie odcinki razem to:	x (ołówków)	x (cm na mapie)	x (m w rzeczywistości)

Oszacowanie czasu potrzebnego do przebycia drogi z punktu A do B

Jeśli przebycie drogi z punktu A do punktu B wymaga skorzystania z autobusu/tramwaju lub innego środka lokomocji, nauczyciel wręcza uczniom rozkład jazdy danej linii. Na podstawie rozkładu jazdy uczniowie odczytują, ile czasu potrzeba na dostanie się do celu.

Aby wsiąść do pojazdu komunikacji miejskiej, należy dostać się na konkretny przystanek, z reguły pieszo. Poniżej opisana metoda może być wykorzystana również wtedy, gdy uczniowie będą przebywać drogę z punktu A do B w całości na pieszo.

Wykorzystując dane policzone w pierwszym etapie rozwiązywania zadania, uczniowie mogą oszacować czas, jaki jest potrzebny na dotarcie ze szkoły na przystanek.

W tym celu mierzą długość szkolnego korytarza lub boiska. Następnie mierzą czas (za pomocą stopera), jaki potrzebują na przebycie wyznaczonego odcinka w średnim tempie.

Kolejnym krokiem jest odpowiedzenie na pytanie, ile razy zmierzona długość korytarza/ boiska mieści się w trasie wyznaczonej od punktu A do B.

Następnie odpowiadają na przykładowe pytanie: skoro na przebycie 20 m potrzebuję 5 s, to na całą trasę będę potrzebować (tu podaje wyliczoną liczbę) sekund. A to odpowiada (tu podaje wyliczoną liczbę) minutom.

Po zakończeniu obliczeń uczeń z pomocą nauczyciela porównuje wyniki swoje i te podane przez algorytm Google. Uczniowie w klasie dyskutują o ewentualnych rozbieżnościach między własnymi szacunkami i informacjami podawanymi przez komputer oraz możliwymi ich przyczynami.

Stopień III

Nauczyciel stawia uczniom pytanie kluczowe: „Jak dostać się z punktu A i B?”.

Uczniowie podzieleni na małe grupy rozpatrują problem w formie dyskusji (tu można zastosować technikę burzy mózgów, uczniowie mogą stworzyć metaplan itp.) i starają się sformułować pytania szczegółowe, na które będą szukać odpowiedzi.

Obok pytań rozbijających problem na mniejsze zagadnienia (Jak najszybciej?, Jak najbezpieczniej? itd.) uczniowie zastanawiają się, jakimi technikami mają się posłużyć, aby odpowiedzieć na zadane sobie pytania.

Nauczyciel przygotowuje różne materiały (wydruki mapy w różnej skali, listę interesujących obiektów znajdujących się na trasie, rozkłady jazdy, można dołączyć nawet taryfy taksówek, by móc porównać koszty dostania się do celu, różne przyrządy miernicze). Uczniowie wybierają z tych materiałów te, które uważają za przydatne do rozwiązania przedstawionego problemu ze względu na wybraną przez nich strategię.

Na koniec prezentują otrzymane wyniki, porównują je z innymi grupami oraz odpowiedziami algorytmu Google.

W Stopniu III ważne jest zarezerwowanie uczniom odpowiedniej ilości czasu do wykonania zadania. Kompleksowość przedstawionych rozwiązań będzie zależała w dużej mierze od zaangażowania i kreatywności uczniów.

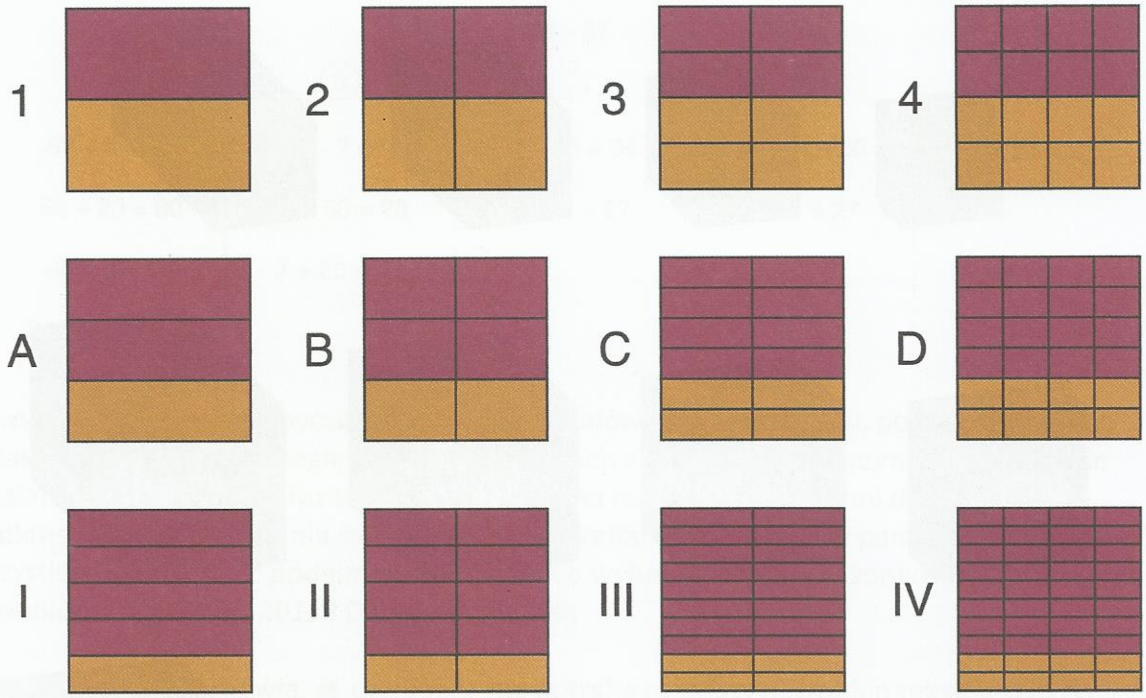
Przykłady zadań i sytuacji ilustrujące konstruktywistyczne podejście do nauczania – uczenia się matematyki

W matematyce pojawia się wiele sytuacji pozwalających na to, by uczniowie dokonywali odkryć, konstruowali swoją wiedzę matematyczną, poznawali jej strukturę. Poniżej przedstawione są przykłady takich sytuacji w zakresie odkrywania oraz rozumienia różnych strategii w rozwiązywaniu zadań.

Przykład 1. Porównywanie ułamków zwykłych

Uczniowie mogą odkryć ułamki równe oraz sprawnie porównywać ułamki zwykłe, zaczynając od posługiwania się odpowiednio podzielonymi kwadratami (jak na rysunku poniżej), prostokątami lub kołami.

Początkowo najlepiej byłoby, gdyby uczniowie mieli wycięte figury i mogli je na siebie nakładać, następnie można przejść do rysunków, a na końcu do zapisu symbolicznego.

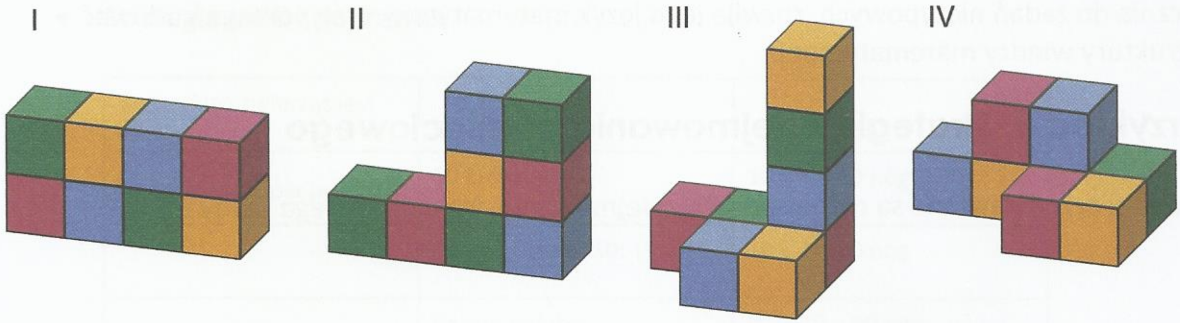


Doświadczenie pokazuje, że uczniowie dokonują największej liczby odkryć, gdy zaczynają od nakładania na siebie części figur i ich porównywania. Mogą w ten sposób stosunkowo szybko porównywać, dodawać i odejmować ułamki.

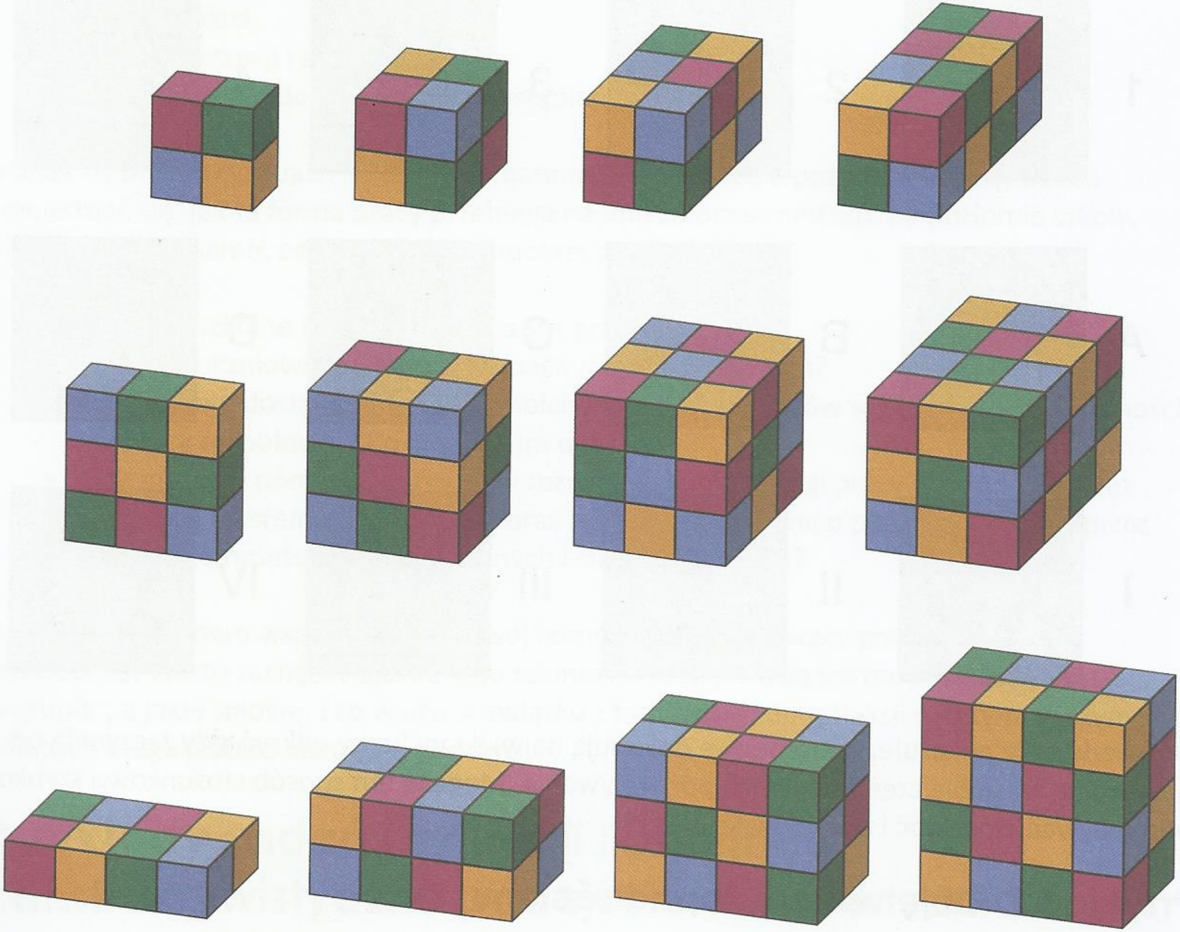
Przykład 2. Objętość prostopadłościanu

Podobną drogę – od konkretu przez rysunek do symbolu (wzoru) – uczniowie mogą przejść w przypadku poszukiwania sposobu obliczania objętości prostopadłościanu.

Warto zacząć od zabawy klockami, zachęcać uczniów do budowania różnych brył z podanej liczby klocków



Następnie należy przejść do rysunków, pytając uczniów, z ilu klocków zbudowane są narysowane bryły.



Na koniec warto poprosić uczniów o podanie sposobu szybkiego liczenia objętości, i wspólnie podsumować działanie, formułując wzór na obliczanie objętości prostopadłościanu.

Ważnym elementem konstruowania własnej wiedzy matematycznej jest znajomość różnych strategii postępowania, np. rachowania w pamięci czy rozwiązywania zadań tekstowych. Poznawanie i analiza różnych strategii pozwala na bardziej elastyczne, otwarte podejście ucznia do zadań nietypowych, rozwija jego język matematyczny oraz pomaga budować struktury wiedzy matematycznej.

Przykład 4. Strategie rozwiązywania zadań tekstowych

Zadanie 1.
W zagrodzie były kury i króliki. Razem było 20 głów i 68 nóg. Ile było kur, a ile królików?
To zadanie większość dorosłych rozwiązałaby przy pomocy układu równań. Jednak można zrobić to inaczej. Poniżej przedstawione są trzy sposoby: prób i poprawek, rysunek i tabelka.

- **Strategia prób i poprawek**

Wszystkich zwierząt jest 20.		
To może królików jest 10?	10 królików to:	10 x 4 = 40 nóg
	Kur też byłoby 10:	10 x 2 = 20 nóg
	Razem byłoby	40 + 20 = 60 nóg

Nóg miało być 68, czyli jest za mało. Pierwszy strzał i pudło. Ale co to oznacza? Co wynika z tego, że gdy królików jest 10, to nóg łącznie jest za mało? Czy królików powinno być mniej czy więcej niż 10?

Więcej, bo to one „dodają" nóg		
Pora na poprawkę! To może 12?	12 królików to:	12 x 4 = 48 nóg
	8 kur to:	8 x 2 = 16 nóg
	Razem byłoby	48 + 16 = 64 nogi

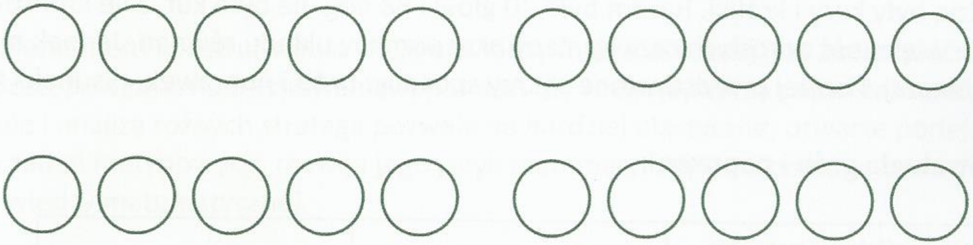
Znacznie lepiej!

Widać już, że królików było 14.	14 królików to:	14 x 4 = 56 nóg
Ale sprawdźmy na wszelki wypadek:	6 kur to:	6 x 2 = 12 nóg
	Razem byłoby	56 + 12 = 68 nóg!

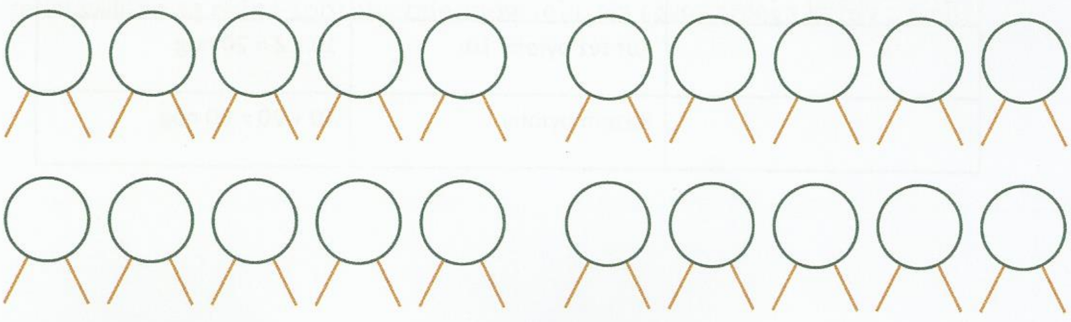
Zrobione!
(Por. Dąbrowski, 2008).

- **Dobry rysunek**

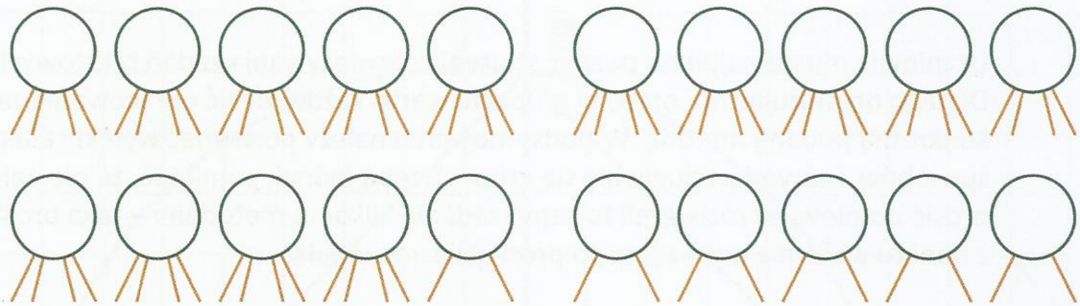
Było 20 głów, narysujmy je:



Do każdej głowy „doczepiamy" dwie nogi:



Tak wyglądałaby sytuacja, gdyby były to same kury. „Użyliśmy" już 40 nóg. Zostało nam jeszcze 28 nóg „bez przydziału", więc dorysujmy je parami, zmieniając w ten sposób kury na króliki.



Zadanie narysowane. Teraz wystarczy policzyć: 14 królików i 6 kur.

Warto sprawdzić, czy czego nie pominęliśmy: 14 x 4 + 6 x 2 = 56 + 12 = 68.

- **Zrób tabelkę**

Użycie tabeli jako sposobu rozwiązywania zadań pozwala na szukanie związku między danymi i niewiadomymi.
Warto zacząć od metody prób i poprawek. Załóżmy, że było tyle samo królików i kur.

Liczba królików	Liczba nóg królików	Liczba kur	Liczba nóg kur	Łączna liczba głów królików i kur	Łączna liczba nóg królików i kur
10	40	10	20	20	60

60 nóg to za mało. Zwiększajmy zatem stopniowo liczbę królików.

Liczba królików	Liczba nóg królików	Liczba kur	Liczba nóg kur	Łączna liczba głów królików i kur	Łączna liczba nóg królików i kur
10	40	10	20	20	60
11	44	9	18	20	52
12	48	8	16	20	54
13	52	7	14	20	56
14	56	6	12	20	58

Najtrudniejszą czynnością tej metody było zbudowanie tabelki. Rozwiązanie przyniosło wykorzystanie prostych zależności.

Wiązka zadań: Wyciąg narciarski

Liczba przejazdów	Cena
1 przejazd	2 Euro
karnet 5 przejazdów	6 Euro
karnet 10 przejazdów	9 Euro
karnet całodzienny	25 Euro

Zadanie 1 (1 pkt.)

Rano Kasia kupiła karnet na 10 przejazdów, po południu karnet na pięć przejazdów i dodatkowo na dwa pojedyncze przejazdy. Ile zapłaciła?

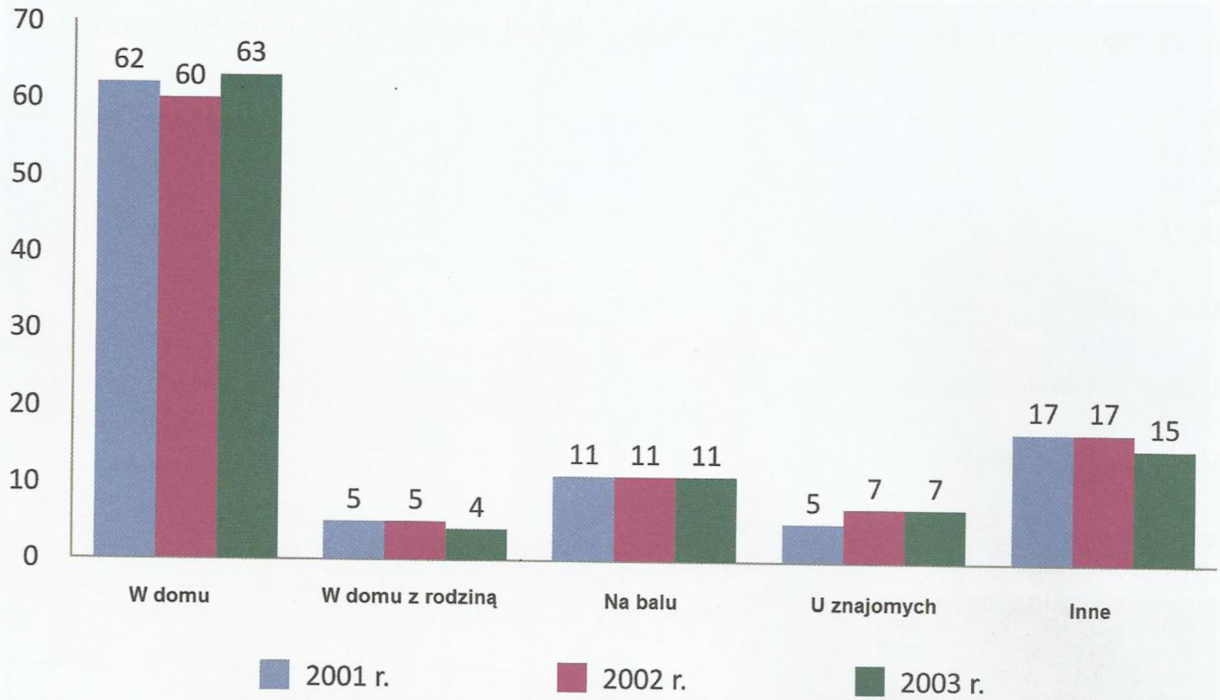
A. 25 Euro
B. 30 Euro
C. 19 Euro
D. 22 Euro

Zadanie 2 (1 pkt.)

Ile co najmniej przejazdów należałoby wykonać, aby opłacało się kupić karnet za 25 Euro?

A. 23
B. 24
C. 25
D. 26

Wiązka zadań: Sylwester



Zadanie 2 (1 pkt.)

W 2001 i 2003 roku taki sam procent osób spędzało Sylwestra:

A. na balu
B. w domu, w gronie rodzinnym
C. na prywatnym spotkaniu u znajomych w mieszkaniu
D. na prywatnym spotkaniu we własnym domu.

Zadanie 3 (1 pkt.)

Liczba badanych respondentów w każdym roku wynosiła 1200 osób. Oblicz, ile osób odpowiedziało w ankiecie, że spędzą Sylwestra na balu w 2001 roku.

A. 60
B. 84
C. 132
D. 720

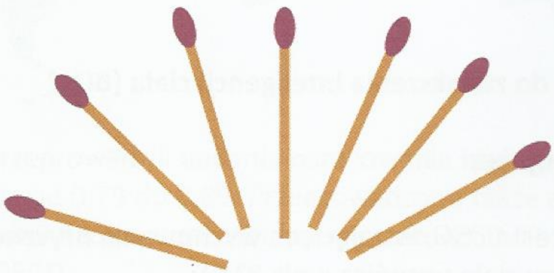
Zapałki

Wykonywanie działań na liczbach arabskich.

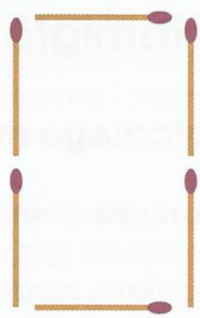
Jak przygotować uczniów do rozwiązywania zagadek z zapałkami?

Ćwiczenie 1

Z zapałek ułóż cyfry od 0 do 9.



Wielkość cyfr:



Ćwiczenie 2

Mając cyfrę 9, ułóż cyfrę 0.

Komentarz: uczniowie ćwiczą umiejętność konstruowania cyfr na podstawie zbudowanej innej.

Nauczyciel musi zwrócić uwagą na to, czy uczniowie:

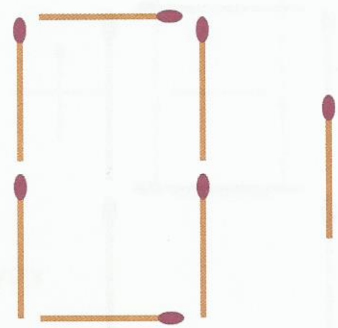
1) konstruując nową cyfrę, wykonują czynności całkowicie od nowa (burzą pierwotna i budują nową),

2) konstruując nową cyfrę, wykorzystują wcześniej zbudowaną, ale niekoniecznie posługują się ruchami optymalnymi – zmieniają kilka zapałek,

3) konstruując nową cyfrę, wykorzystują wcześniej zbudowaną, ale posługują się ruchami optymalnymi – zmieniają jedną zapałkę.

Ćwiczenie 3

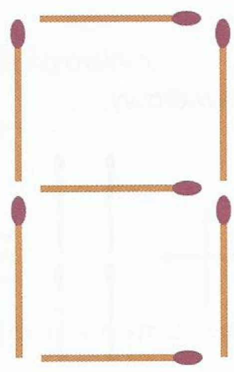
Zamień cyfrę zero na inną cyfrę, dokładając jedną zapałkę.



Rozwiązanie: cyfra 8.

Ćwiczenie 4

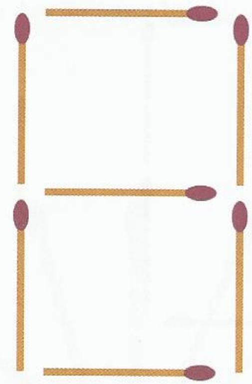
Zamień cyfrę 8 na inną cyfrę, zabierając jedną zapałkę.



Rozwiązanie: cyfra 6, 0, 9.

Ćwiczenie 5

Jakie cyfry otrzymam, zabierając jedną zapałkę lub dwie zapałki?



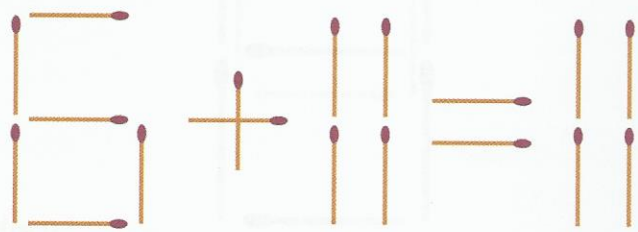
Rozwiązanie: zabierając 1 zapałkę: 0, 9, 6, zabierając 2 zapałki: 3, 5, 2.

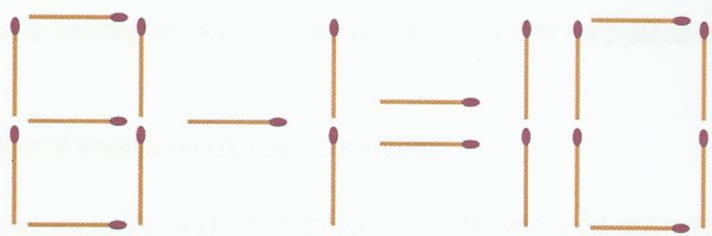
Ćwiczenie 6

Ile zapałek trzeba zabrać z ułożonej cyfry 8, aby otrzymać: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9?

Ćwiczenie 7

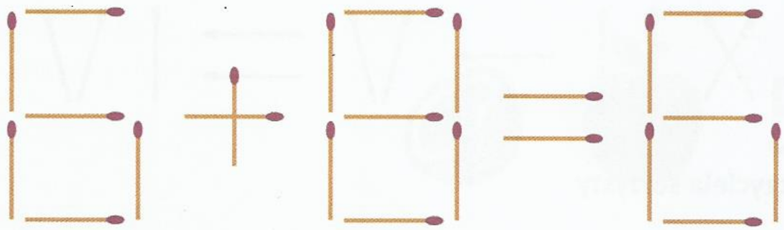
Zmień jedną zapałkę, aby wynik był prawidłowy.





Ćwiczenie 8

Zamień dwie zapałki, aby wynik był prawidłowy.



Zadanie dla nauczyciela-stażysty

Zaprojektuj dla swoich uczniów własne zabawy z zapałkami ćwiczące spostrzegawczość. Przedstaw propozycję opiekunowi. Razem omówcie zasadność użycia zaproponowanych przez ciebie rozwiązań.

Wykonywanie działań na liczbach rzymskich

W codziennych obliczeniach używa się systemu arabskiego. Jednak w niektórych zapisach używamy liczb zapisanych w systemie rzymskim.

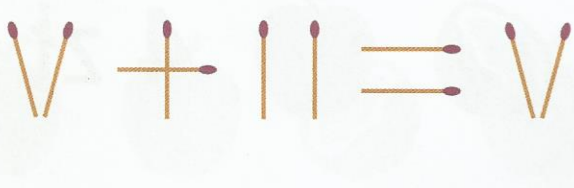
Najczęściej stosujemy zapis w systemie rzymskim:

- opis miesięcy,
- opis wieku historii,
- opis numerów szkół,
- opis rozdziałów w książce.

System arabski jest systemem pozycyjnym, a rzymski symbolicznym (utrudniony zapis – rozbudowany i długi).

Ćwiczenie 1

Zmień jedną zapałkę, aby wynik był prawidłowy.



Ćwiczenie 2

Zamień dwie zapałki, aby wynik był prawidłowy.

Zadanie dla nauczyciela stażysty

Zaprojektuj dla swoich uczniów własne zabawy z zapałkami dotyczące liczb w systemie rzymskim. Przedstaw tę propozycję opiekunowi. Razem omówcie zasadność użycia zaproponowanych przez ciebie rozwiązań.

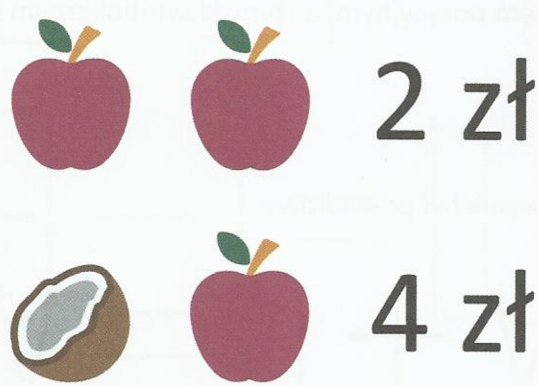
Rozwiązywanie układów równań liniowych

Podstawa programowa przewiduje rozwiązywanie układów równań liniowych w klasie 8. Przez rozwiązywanie łamigłówek już na wczesnym etapie możemy przygotować uczniów do realizacji tego zagadnienia.

Jak w łatwy sposób przedstawić rozwiązywanie równań liniowych? Można wyjść od prostej łamigłówki z owocami, gdzie owocom (niewiadomym) odpowiadają liczby. Na początek ćwiczymy wnioskowanie wartości niewiadomej.

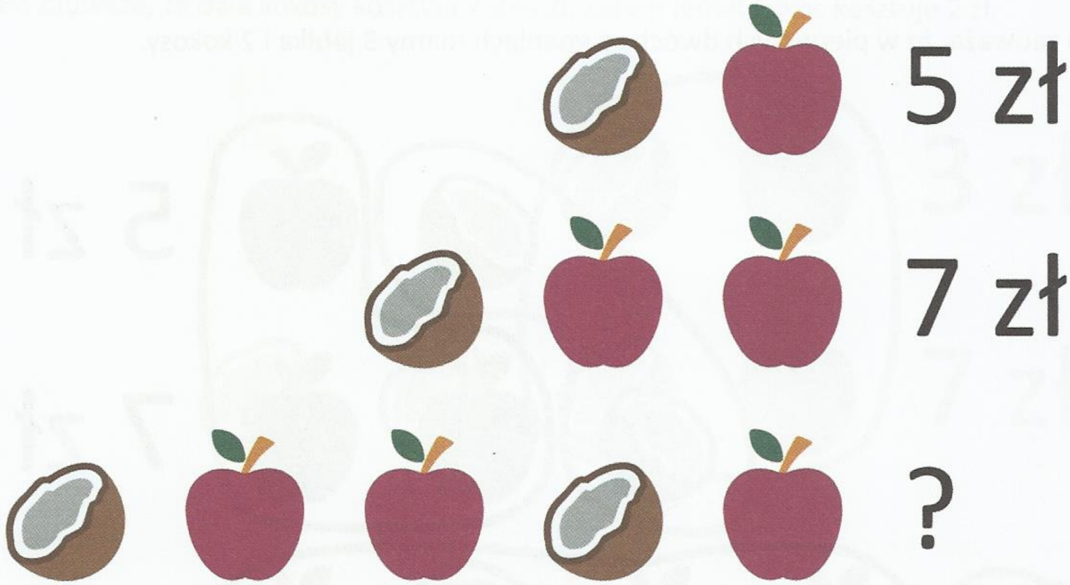
Ćwiczenie 1

Przeanalizuj rysunek. Ile kosztuje kokos?



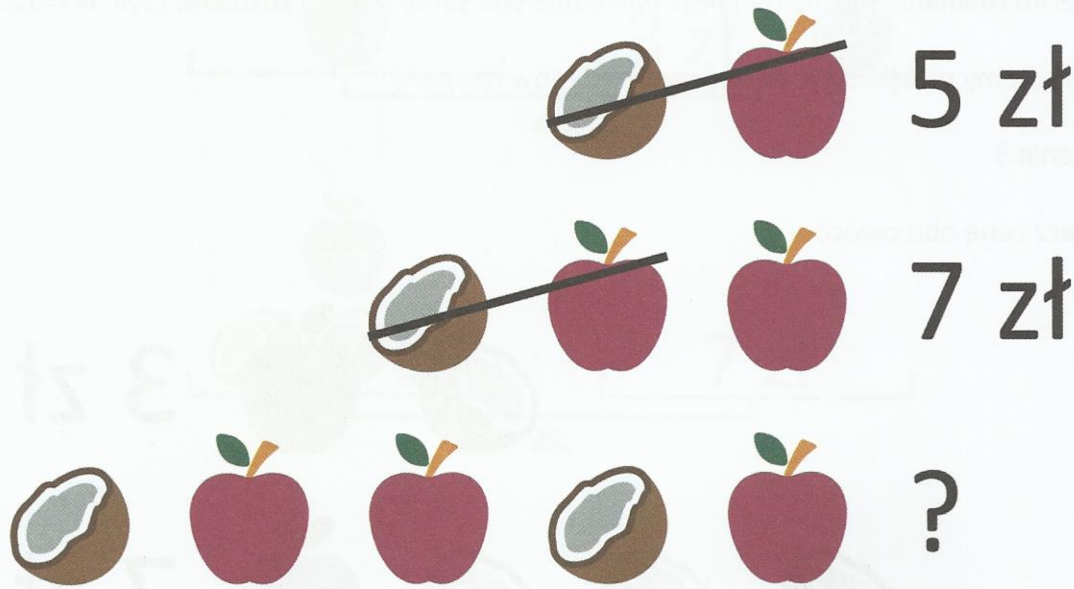
Ćwiczenie 2

Przeanalizuj rysunek. Uzupełnij działania.



Strategie rozwiązania zadania

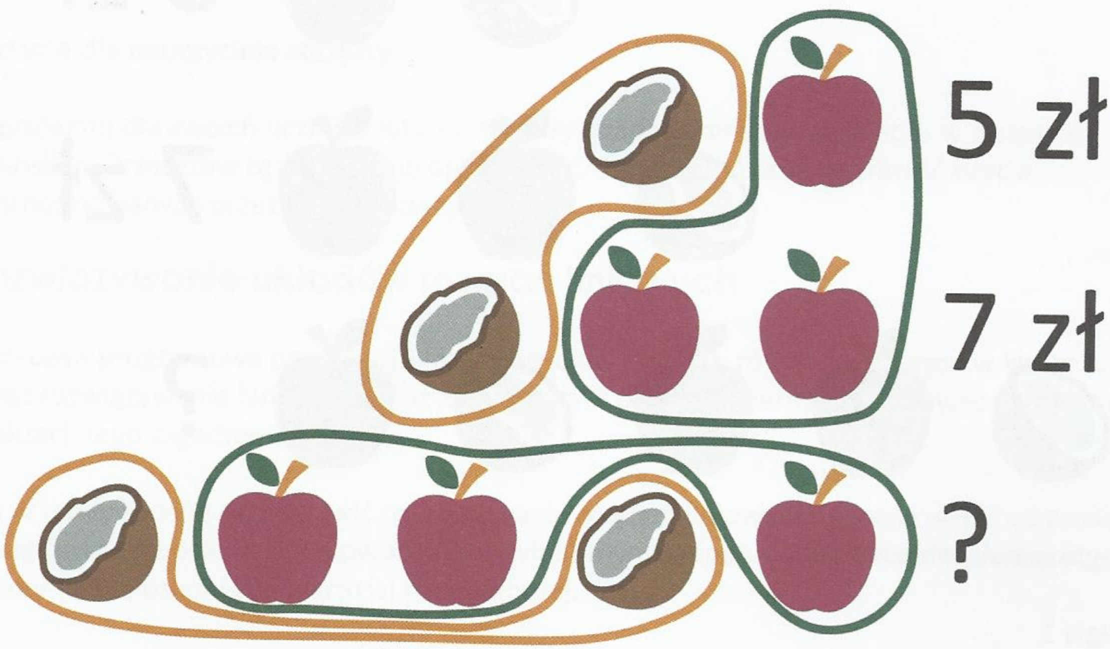
Strategia 1



Uczeń zauważa, że w pierwszym i drugim równaniu powtarzają się owoce (jabłko i kokos). Z drugiego równania można wywnioskować, że jabłko kosztuje 7-5=2. Wracając do pierwszego równania, możemy powiedzieć, że skoro jabłko kosztuje 2 zł, to kokos 3 zł. Wynikiem równania trzeciego będzie więc 12.

Strategia 2

Uczeń zauważa, że w pierwszych dwóch równaniach mamy 3 jabłka i 2 kokosy.

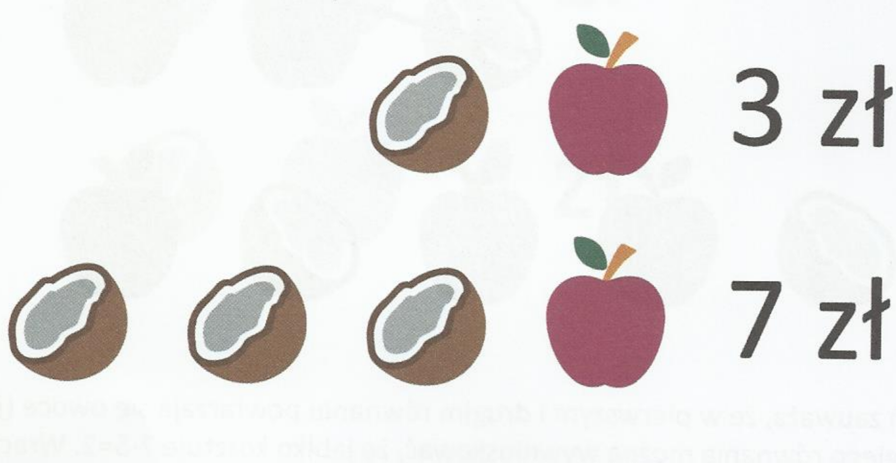


W trzecim równaniu można odnaleźć dokładnie tyle samo jabłek i kokosów, czyli 5+7=12.

Teraz możemy przejść do rozwiązywania układów równań.

Ćwiczenie 3

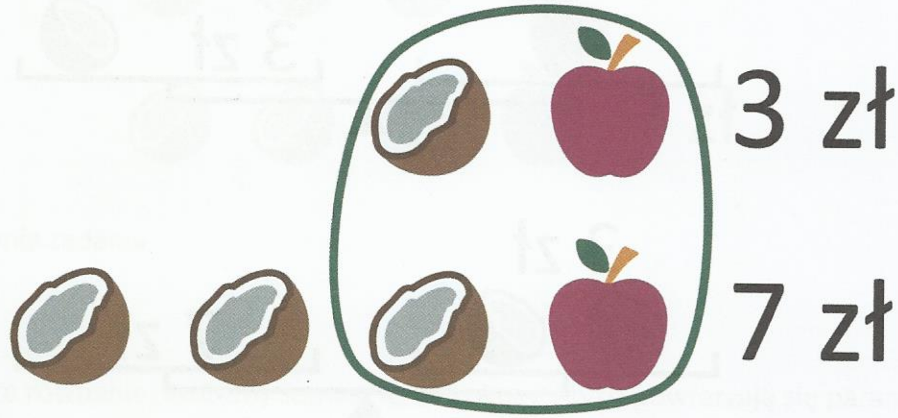
Wyznacz cenę obu owoców.



Strategie rozwiązania zadania

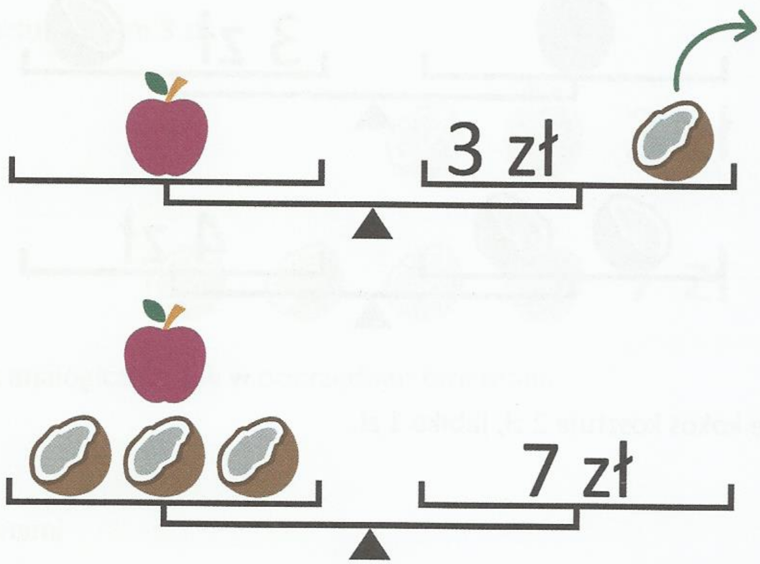
Strategia 1

Uczeń zauważa, że dwa kokosy kosztują 7-3=4 zł. Zatem jeden kokos kosztuje 2 zł.



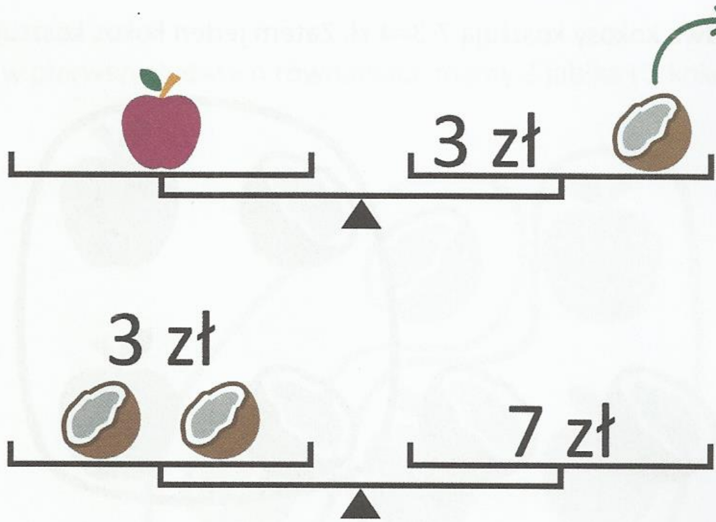
Strategia 2

Uczeń zauważa, że cena jabłka to 3 zł pomniejszone o cenę kokosa.

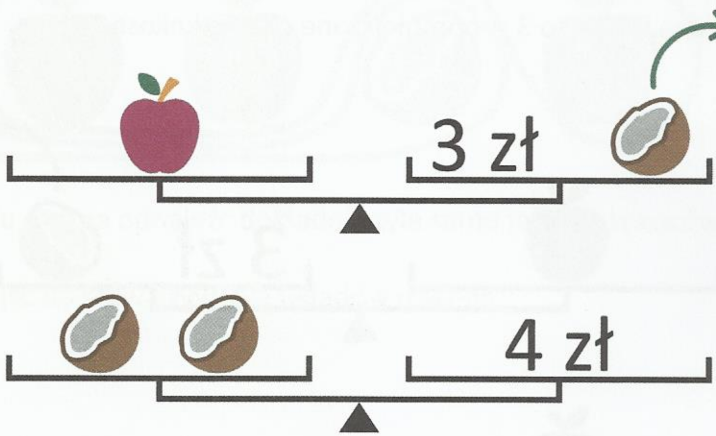


Zatem w drugim równaniu można zamiast jednego jabłka podstawić 3 zł – kokos:

Po uproszczeniu otrzymujemy:



Obliczamy drugie równanie:



I otrzymujemy, że kokos kosztuje 2 zł, jabłko 1 zł.

Ćwiczenie 4

Wyznacz cenę jabłka i kokosa.

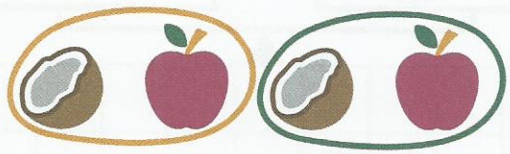
6 zł

7 zł

Strategie rozwiązania zadania

Strategia 1

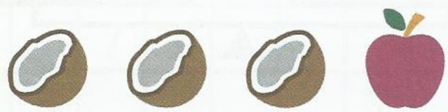
Analizując pierwsze równanie, możemy zauważyć, że kokos i jabłko powtarzają się parami.



6 zł

Kokos i jabłko kosztują razem 3 zł.

3 zł



7 zł

Dalej rozwiązanie analogicznie, jak w poprzednim ćwiczeniu.

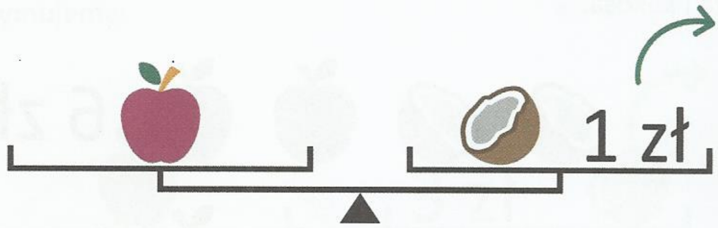
Strategia 2

Odejmujemy stronami

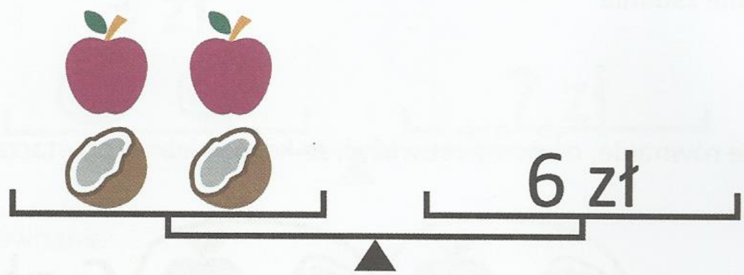
6 zł

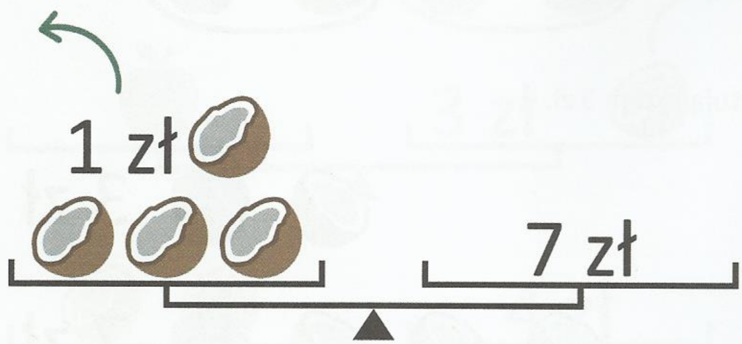
7 zł

Po przekształceniu otrzymujemy:



Podstawiając do drugiego równania wyrażenie "kokos -1", otrzymujemy:





Ostatecznie jeden kokos kosztuje 2 zł, a jabłko 1 zł.

Zadanie dla nauczyciela stażysty

Zaprojektuj własne przykłady ilustrujące rozwiązywanie układów równań. Przedstaw swoją propozycję opiekunowi. Razem omówcie zasadność użycia zaproponowanych przez ciebie rozwiązań.