Zmiany w egzaminie maturalnym z matematyki w formule 2023 r.

Justyna Biernacka
doradca metodyczny
ds. matematyki
CRE WŁ w Skierniewicach

Zakres tematyczny

- Matura z matematyki na poziomie podstawowym lub rozszerzonym, główne złożenia.
- Zmiana podstawy przeprowadzania egzaminu maturalnego z matematyki w roku 2023 oraz2024.
- Opis arkusza egzaminacyjnego.
- Przykładowe zadania maturalne, **czego nie będzie** na egzaminie maturalnym z matematyki w roku 2023 oraz2024.

Cele

Po zajęciach nauczyciel:

- Doskonali warsztat pracy w zakresie przygotowania uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym lub rozszerzonym
- Zna konstrukcję arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym lub rozszerzonym
- Zna i stosuje w praktyce szkolnej przykładowe zadania maturalne zgodne z wymaganiami egzaminacyjnymi w roku 2023 oraz 2024
- Zna aneksy do informatora maturalnego o egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym lub rozszerzonym

Podstawy prawne

- Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2018 r. poz. 467).
- Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 26 lutego 2021 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2021 r. poz. 482) - **Egzamin maturalny w Formule 2023**
- WYMAGANIA EGZAMINACYJNE DOTYCZĄCE EGZAMINU MATURALNEGO W LATACH SZKOLNYCH 2022/2023 I 2023/2024

Wymagania a podstawa programowa

W roku 2023 oraz 2024 egzamin maturalny z matematyki jest przeprowadzany na podstawie wymagań egzaminacyjnych opublikowanych przez MEiN w dniu 8 lutego 2022,

a nie – jak miało to miejsce do roku 2020 włącznie – na podstawie wymagań określonych w podstawie programowej kształcenia ogólnego.

Zmiana ta wynika z konieczności dostosowania wymagań egzaminacyjnych do specyfiki kształcenia związanej z epidemią SARS-CoV-2.

INFORMATOR
o **egzaminie maturalnym**
z **matematyki**

jako przedmiotu
obowiązkowego
(poziom podstawowy)

od roku szkolnego 2022/2023

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2021

INFORMATOR
o **egzaminie maturalnym**
z **matematyki**

jako przedmiotu
dodatkowego
(poziom rozszerzony)

od roku szkolnego 2022/2023

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2021

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Aneks do** ***Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki*** ***jako przedmiotu obowiązkowego*** **obowiązujący w latach szkolnych 2022/2023 oraz 2023/2024 (projekt)**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka** – poziom podstawowy
Termin egzaminu:	Termin główny – **maj 2023 r.** oraz **maj 2024 r.** Termin dodatkowy – **czerwiec 2023 r.** oraz **czerwiec 2024 r.** Termin poprawkowy – **sierpień 2023 r.** oraz **sierpień 2024 r.**
Data publikacji dokumentu:	25 lutego 2022 r.

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Aneks do** ***Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki*** **obowiązujący w latach szkolnych 2022/2023 oraz 2023/2024 (projekt)**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka** – poziom rozszerzony
Termin egzaminu:	Termin główny – **maj 2023 r.** oraz **maj 2024 r.** Termin dodatkowy – **czerwiec 2023 r.** oraz **czerwiec 2024 r.**
Data publikacji dokumentu:	25 lutego 2022 r.

Działania CKE

- Propozycje aneksów do Informatorów o egzaminie maturalnym w latach 2023 i 2024 opublikowano **25 lutego 2022 r.** na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej,
- **Arkusze pokazowe** egzaminu maturalnego w Formule 2023, zgodne z propozycjami wymagań egzaminacyjnych opublikowano **4 marca 2022r.** na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej oraz na stronach internetowych okręgowych komisji egzaminacyjnych,
- Arkusze pokazowe **nie powinny** być wykorzystywane do przeprowadzania diagnozy stopnia przygotowania uczniów do egzaminu maturalnego,
- Arkusze pokazowe należy wykorzystać jako **materiał poglądowy,** służący zapoznaniu przyszłych maturzystów z formułą arkusza egzaminacyjnego, przeznaczony do wspólnego rozwiązania zadań w klasie lub w domu i w klasie, z jasno przekazaną informacją, które zadania wykraczają poza opracowany wcześniej materiał.

Działania CKE

- **„Matura próbna" z OKE od 28 do 30 września 2022 r**. zainteresowane szkoły będą mogły przeprowadzić test diagnostyczny w zakresie poziomu przygotowania uczniów do egzaminu maturalnego (tzw. egzamin próbny) **z przedmiotów obowiązkowych** (język polski, matematyka, język angielski, język francuski, język hiszpański, język niemiecki, język rosyjski, język włoski) **na poziomie podstawowym.**
- **„Matura próbna" z CKE od 12 do 22 grudnia 2022 r.** zainteresowane szkoły będą mogły przeprowadzić test diagnostyczny w zakresie poziomu przygotowania uczniów do egzaminu maturalnego (tzw. egzamin próbny) ze wszystkich przedmiotów na wszystkich poziomach. Szczegółowy harmonogram przeprowadzania próbnej matury zostanie udostępniony w listopadzie br.
- Centralna Komisja Egzaminacyjna **za nieuzasadnione** uważa wystawianie ocen na podstawie uzyskanych przez danego ucznia wyników testu diagnostycznego z poszczególnych przedmiotów.

Wymagania egzaminacyjne opublikowane przez MEiN w dniu 8 lutego 2022 r.

- Wymagania zostały opracowane przez zespoły ekspertów, którzy w ostatecznej wersji dokumentu uwzględnili również znaczną część uwag przekazanych do CKE i MEiN podczas prekonsultacji propozycji wymagań, przeprowadzonych na przełomie grudnia 2021 r. i stycznia 2022 r.
- Wzmagania zamieszczono w aneksach do informatorów o egzaminie maturalnym z matematyki, są zawężoną wersją wymagań z podstawy programowej.
- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/Aneks/Aneks_2023_2024_matematyka_EM_PP.pdf
- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/Aneks/Aneks_2023_2024_matematyka_EM_PR.pdf

Konstrukcja arkusza PP

Zadania zamknięte (20 - 25)

- zadania wyboru wielokrotnego
- zadania typu prawda-fałsz
- zadania na dobieranie.

Zadania otwarte (9 - 15)

- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym wykonania lub uzupełniania wykresu, zależności, diagramu, tabeli
- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia zwykle w dwóch lub trzech etapach
- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji.

Czas pracy z arkuszem 180 minut

Egzamin maturalny w roku 2023 oraz 2024
Matematyka – poziom podstawowy

Dla absolwentów 4-letniego liceum (od 2023 r.) **i 5-letniego technikum** (od 2024 r.) (*Formuła 2023*)

Przeprowadzany na podstawie **wymagań egzaminacyjnych**, zawierających ograniczony zakres wymagań podstawy programowej (np. ograniczenie liczby zadań na dowodzenie w arkuszu (do jednego), brak zadania na dowód geometryczny, usunięcie wzorów skróconego mnożenia dla potęg trzecich, ograniczenie wymagań dotyczących wielomianów, ograniczenie wymagań ze stereometrii, m.in. całkowite usunięcie zagadnień dotyczących brył obrotowych).

Czas trwania: **180** minut.

Za rozwiązanie zadań można uzyskać maksymalnie **46 punktów**, w tym: 29 pkt – zadania zamknięte; 17 pkt – zadania otwarte.

Liczba zadań otwartych: **7–13**.

Nowość w arkuszu maturalnym PP

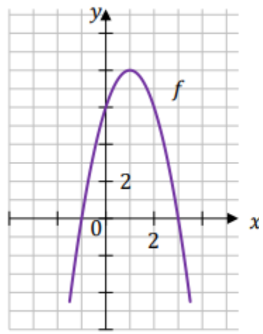
W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania.

Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce.

Wiązka zadań może się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Zadanie 10.

Dana jest funkcja kwadratowa f, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają współrzędne całkowite.



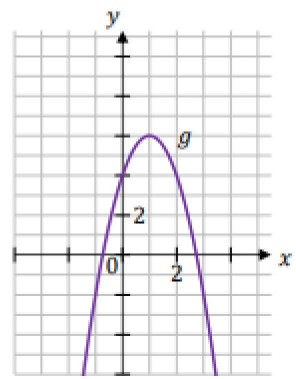
Zadanie 10.1. (0–1)

Funkcja g jest określona za pomocą funkcji f następująco: $g(x) = f(x-2)$.

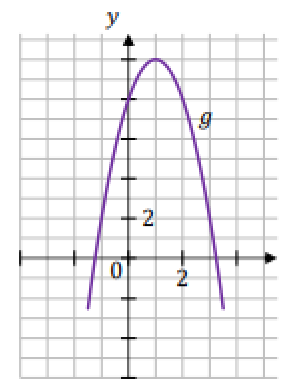
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji g przedstawiono na rysunku

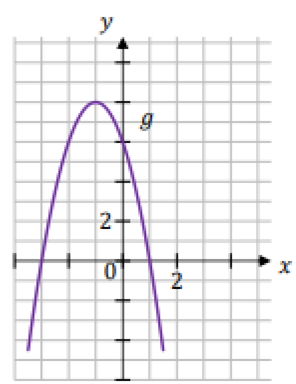
A.



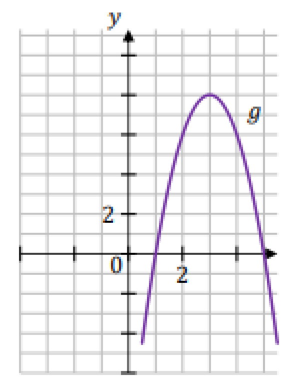
B.



C.



D.



Zadanie 10.2. (0–1)

Wyznacz i zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór wszystkich rozwiązań nierówności:

$$f(x) \le 0$$

....

Zadanie 10.3. (0–3)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -3n + 5$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczby $2, (-1), (-4)$ są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu (a_n).	**P**	**F**
(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 5.	**P**	**F**

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 10$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta ABC jest równy $(-0{,}65)$.	**P**	**F**
Trójkąt ABC jest rozwartokątny.	**P**	**F**

Czego nie będzie na egzaminie PP

Przeniesiono do PR

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;

Zadanie 11. (0–3)

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki:

$$a \neq 0, b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a^3+b^3=(a+b)^3.$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, spełniających powyższe warunki.

Zadanie 15. (0–3)

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba a^3+b^3 jest podzielna przez 9.

Czego nie będzie na egzaminie PP

Usunięto z wymagań PP i PR

Wymaganie szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:

5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe.

Zadanie 13. (0–3)

Rozwiąż równanie $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0$.

Czego nie będzie na egzaminie PP

Przeniesiono do PR

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:

6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;

Zadanie 16. (0–3)

Dany jest wielomian

$$W(x) = 3x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że ten wielomian można zapisać w postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x + 2)Q(x)$$

gdzie $Q(x)$ jest pewnym trójmianem kwadratowym.

Wyznacz wielomian $Q(x)$ oraz oblicz wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$.

Czego nie będzie na egzaminie PP

Usunięto z wymagań PP i PR

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:

2) Oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie [...].

Zadanie 23. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1. \end{cases}$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Czego nie będzie na egzaminie PP

Przeniesiono do PR

Wymagania szczegółowe

VIII. [Szkoła podstawowa] Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Zdający:

8) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa […].

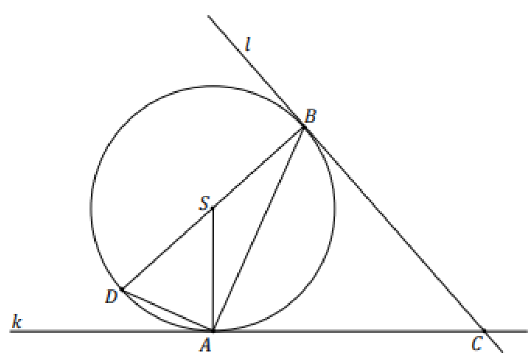
VIII. Planimetria. Zdający:

9) ~~wykorzystuje~~ zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zadanie 37. (0–3)

Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek poniżej).

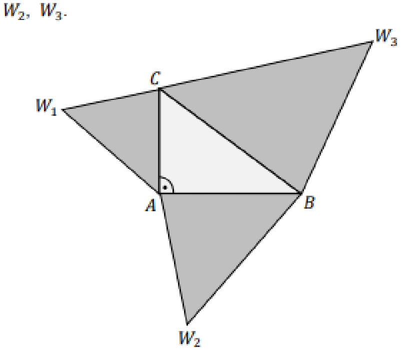


Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

Zadanie 35. (0–3)

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1, ABW_2, CBW_3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1, W_2, W_3.



Pola trójkątów: CAW_1, ABW_2, CBW_3 oznaczymy odpowiednio jako P_1, P_2, P_3.

Udowodnij, że:

$$P_3 = P_1 + P_2$$

Czego nie będzie na egzaminie PP

Przeniesiono do PR

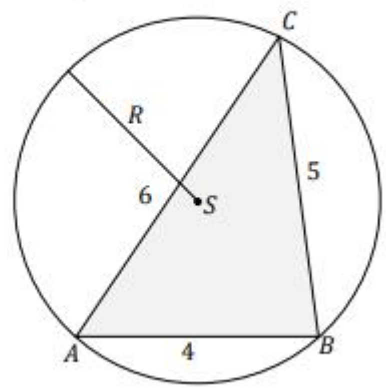
Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Zadanie 38. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$. Na tym trójkącie opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R.



Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Czego nie będzie na egzaminie PP

Przeniesiono do PR

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

7) […] rozwiązuje równania i nierówności typu $|x+4|=5$, $|x-2|<3$, $|x+3|>4$.

III. Równania i nierówności. Zdający:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

4) ~~posługuje się równaniem okręgu~~ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;

6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu […].

Zadanie 41.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y), dane są okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S=(3,-4)$ i prosta k o równaniu $2x-y-11=0$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k w punkcie P.

Czego nie będzie na egzaminie PP

Usunięto z PP i PR

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:

4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów.

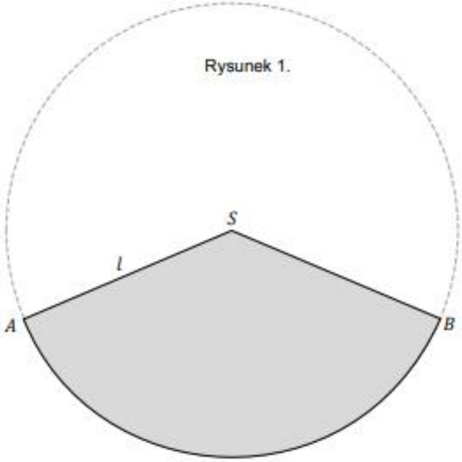
Zadanie 45.

Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt powierzchni bocznej stożka o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

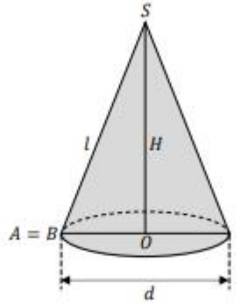
Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.).

Do obliczeń przyjmij, że rzeczywiste figury są idealne.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Czego nie będzie na egzaminie PP

Usunięto z PP i PR

Wymagania szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:

1) ~~oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;~~
5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zadanie 49. (0–3)

Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich wspólny kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry, której ścianki są oznaczone od 1 do 6. Gdy na kostce wypadnie liczba oczek mniejsza od 4, to Grzegorz daje Pawłowi 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie liczba oczek równa 6, to Paweł daje Grzegorzowi x żetonów. W pozostałych przypadkach żaden z graczy nie zyskuje ani nie traci żetonów. Paweł i Grzegorz sprawiedliwie ustalili liczbę x żetonów tak, aby wartość oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza.

Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.

Egzamin maturalny w roku 2023 oraz 2024
Przedmioty dodatkowe – poziom rozszerzony

Dla absolwentów 4-letniego liceum (od 2023 r.) **i 5-letniego technikum** (od 2024 r.) (*Formuła 2023*)

Przeprowadzany na podstawie **wymagań egzaminacyjnych**, zawierających ograniczony zakres wymagań podstawy programowej.

Obowiązek przystąpienia do egzaminu z jednego przedmiotu na poziomie rozszerzonym; **bez progu zaliczenia**. Obowiązek uzyskania co najmniej 30% punktów z jednego z wybranych przedmiotów dodatkowych – **od 2025 r.**

Zdający, którzy posiadają **dyplom zawodowy** albo **dyplom potwierdzający kwalifikacje zawodowe**, mogą „zastąpić" tym dyplomem obowiązek przystąpienia do egzaminu z jednego przedmiotu dodatkowego na poziomie rozszerzonym.

Konstrukcja arkusza PR

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym trwa 180 minut .

W arkuszu egzaminacyjnym znajdzie się od 10 do 14 zadań otwartych.

Łączna liczba punktów, jakie można uzyskać za prawidłowe rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu, jest równa 50.

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania.

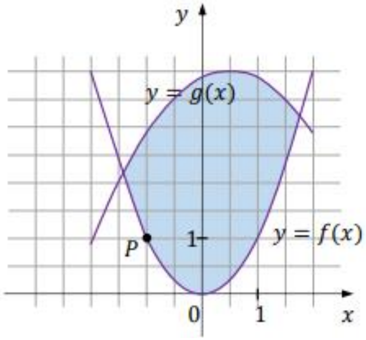
Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce.

Wiązka zadań będzie składać się z zadań otwartych.

Zadanie 6.

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g (zobacz rysunek). Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$.

Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (-1, 1)$.



Zadanie 6.1. (0–2)

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie funkcji g.

Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 6.2. (0–6)

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

Oblicz współrzędne punktu K, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca K toru od początku P) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka.

Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu R leżącego na wykresie funkcji g od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z wymagań PP i PR

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

V. Funkcje. Zdający:

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$ [...].

Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{-3x + 41}{x - 13} \text{ dla } x \neq 13.$$

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f.

Zadanie 7. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1; +\infty)$.

Wykaż, że f jest funkcją rosnąca.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:

1R) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach.

Zadanie 8. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

3R) […] podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

4R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym […];

5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;

6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zadanie 9. (0–4)

Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

$$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t \quad \text{dla} \quad t \in [0, 24]$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach.

Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

2R) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego.

Zadanie 11. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$ dla wszystkich $x > 0$.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Zadanie 14. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Zadanie 16. (0–3)

Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

4R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;

5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;

6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zadanie 12. (0–4)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + 0{,}5 \cdot (2x+1)^4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymaganie szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne [...].

Zadanie 15. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$(2-\cos x)^2 \le 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4{,}75$$

w zbiorze $(0, \pi)$.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

1R) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

VII. Trygonometria. Zdający:

5) stosuje twierdzenie sinusów […].

Zadanie 23. (0–4)

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

Oblicz sinus kąta ABC.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […].

VIII. Planimetria. Zdający:

2) […] stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów […].

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

3R) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory […].

Zadanie 24. (0–4)

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21, -7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15, 8]$.

Oblicz pole tego równoległoboku.

Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR wymagania z zakresu brył obrotowych

Zadanie 27. (0–4)

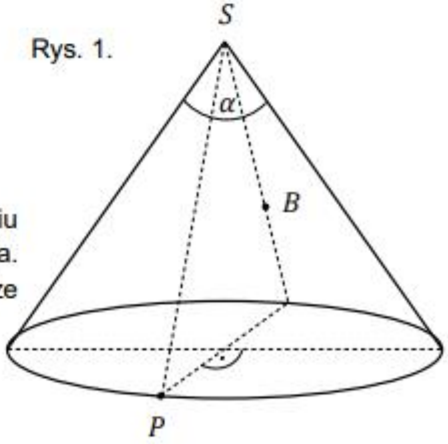
Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt S pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie P położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości H_0 metrów n.p.m. Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy B znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwległym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1.).

Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy.

Przyjmij, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α.

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.

Rys. 1.



Czego nie będzie na egzaminie PR

Usunięto z PR

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:

1R) […] stosuje wzór Bayesa […].

Zadanie 30. (0–3)

Pewna choroba dotyka $0{,}2\%$ całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe $0{,}99$. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe $0{,}98$.

Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.

Dziękuję za uwagę
Życzę efektywnej pracy